

I. megoldás: Fejezzük ki minden szögfüggvényt x szögfüggvényeivel:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x &= \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x(1 + 2 \cos x), \\ \sin 3x &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x(2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos^2 x = \\ &= \sin x(4 \cos^2 x - 1) = \sin x(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1), \\ 1 + \cos x + \cos 2x &= 1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \cos x(1 + 2 \cos x).\end{aligned}$$

Mind a három kifejezésben szerepel az $1 + 2 \cos x$ tényező. A két oldal különbségét képezve és ezt a tényezőt kiemelve

$$\begin{aligned}(1 + 2 \cos x)[\sin x + \sin x(2 \cos x - 1) - \cos x] &= \\ = (1 + 2 \cos x)(2 \sin x \cos x - \cos x) &= (1 + 2 \cos x)(2 \sin x - 1) \cos x.\end{aligned}$$

Ez a kifejezés úgy lehet 0, ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = 0$, tehát a következő szögekre:

$$\begin{aligned}x &= 120^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 240^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \\ x &= 30^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 150^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & k &= 0, 1, 2, \dots \\ x &= 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 270^\circ \pm k \cdot 360^\circ.\end{aligned}$$

Megjegyzés: Igyekeztünk a fentiekben a legismertebb átalakításokkal érni célhoz, azonban sok más módon is átalakíthatjuk az egyenletet. Ha felhasználjuk pl. a bal oldalon a

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

összefüggést,¹ akkor a

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

átalakítás után gyorsabban adódik az $1 + 2 \cos x$ tényező kiemelhető volta és az egyenlet további átalakítása.

II. megoldás: Vizsgáljuk általánosabban tetszőleges n természetes számra a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x$ egyenletet. Ismeretes, hogy a bal oldal is, a jobb oldal is zárt alakra hozható, pl. úgy, hogy megszorozzuk $2 \sin \frac{x}{2}$ -vel. Felhasználva a könnyen igazolható

$$(1) \quad 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

és

$$(2) \quad 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha)$$

azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx) &= 2 \sin \frac{x}{2} \sin x + \\ + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 3x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x + \\ + \cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{5}{2}x - \cos \frac{7}{2}x + \dots + \cos \frac{2n-1}{2}x - \\ - \cos \frac{2n+1}{2}x &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x;\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{x}{2}[1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x] &= 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos x + \\ + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos(n-1)x &= 2 \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2} + \\ + \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x + \dots + \sin \frac{2n-1}{2}x - \sin \frac{2n-3}{2}x &= \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{2n-1}{2}x.\end{aligned}$$

A kapott kifejezések ugyancsak az (1), ill. (2) azonosságok segítségével – azokat ellenkező irányban alkalmazva – szorzattá alakíthatók, ha (1)-ben α -t és β -t úgy választjuk, hogy $\alpha - \beta = \frac{x}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{2n+1}{2}x$ legyen, illetőleg (2)-ben úgy, hogy $\alpha + \beta = \frac{2n-1}{2}x$, $\alpha - \beta = \frac{x}{2}$ legyen.

¹ Ez könnyen igazolható, ha a bal oldalon α -t és β -t a jobb oldalon szereplő szögek összege, illetőleg különbségeként írjuk.

Az első esetben $\alpha = \frac{n+1}{2}x$, $\beta = \frac{n}{2}x$ és így

$$\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x;$$

a második esetben $\alpha = \frac{n}{2}x$, $\beta = \frac{n-1}{2}x$, és így

$$\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{2n-1}{2}x = 2 \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n-1}{2}x.$$

Egyenletünket tehát, ha még 2-vel osztunk, a következő alakra hoztuk:

$$\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x = \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n-1}{2}x.$$

Mivel átalakítás közben szoroztunk $\sin \frac{x}{2}$ -vel, ennek a gyökeit, tehát az $x = k \cdot 360^\circ$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) szögeket külön meg kell vizsgálnunk. Ezekre az eredeti egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon viszont n darab 1-es összege, ezek tehát az eredeti egyenletnek nem gyökei, ezeket a továbbiakban kizárjuk.

Redukáljuk a nyert egyenletet 0-ra, és igyekezzünk szorzattá alakítani a két oldal különbségét:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n+1}{2}x - \cos \frac{n-1}{2}x \right) = \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{x}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{n}{2}x \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{n}{2}x \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{n}{2}x \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{n}{2}x \left\{ \sin \frac{n}{2}x \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \cos \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \right\} = \\ &= \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n}{2}x - \cos \frac{n}{2}x \right) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Itt az első tényező 0-helyei azok a szögek, amelyekre

$$\frac{n}{2}x = k \cdot 180^\circ, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{k \cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

a második, illetőleg harmadik tényező akkor tűnik el, ha

$$\frac{n}{2}x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad \text{ill.} \quad \frac{x}{2} = 45^\circ + k \cdot 180^\circ,$$

tehát az

$$x = \frac{90^\circ}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n}, \quad \text{ill.} \quad x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

szögekre. A lényegesen különböző szögeket különválasztva és az első csoportból a fentebb kizárt $k \cdot 360^\circ$ alakú szögeket elhagyva azt kapjuk, hogy az egyenlet

$$\left. \begin{aligned} x &= r \frac{360^\circ}{n} + k \cdot 360^\circ, & r &= 1, 2, \dots, n-1 \\ x &= \frac{90^\circ}{n} + s \frac{360^\circ}{n} + k \cdot 360^\circ, & s &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A kitűzött feladatot jelentő $n = 3$ esetben a 120° és 240° (és az ezektől nem lényegesen különböző szögek) a gyökök első csoportjából adódnak, 30° és 150° a második csoportból $s = 0, 1$ esetén, 90° az utolsó gyök, míg 270° ismét a gyökök második csoportjából adódik $s = 2$ esetén.

Megjegyzések: A II. megoldásban tárgyalt általánosítást egy versenyző, Németh József felvetette és megoldotta.

A 90° fellephet a gyökök első csoportjában is (akkor, ha n osztható 4-gyel és $r = \frac{n}{4}$), továbbá a gyökök második csoportjában (ha $n \cdot 4l + 1$ alakú és $s = l = \frac{n-1}{4}$). Ezekben az esetekben 90° az egyenletnek kétszeres gyöke.