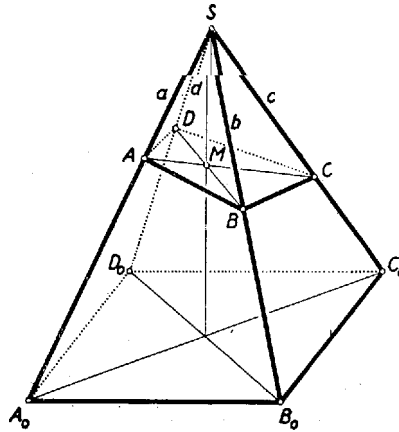


Sok versenyző használt trigonometriát a feladat megoldásában. Bemutatunk egy ilyen megoldást.

I. megoldás. Kiszámítjuk az $SABCD$ gúla térfogatát egyrészt mint az $SABC$ és $SACD$, másrészt mint az $SABD$ és $SBCD$ tetraéderek térfogatának összegét (1. ábra).



1. ábra

Az $SA_0B_0C_0D_0$ gúla S -ből húzott testmagassága egyenlő α szögeket zár be a gúla oldaléleivel, és benne van két-két szemközti oldalél síkjában. Mivel az alaplap négyzet, a kérdéses testmagasság egyben merőleges vetülete is két szemközti oldalél síkjában a másik két oldalélnek. Így egy-egy ilyen síkkal a másik két oldalél α nagyságú szöget zár be.

Jelöljük az SA , SB , SC , SD élhosszúságokat a , b , c , d -vel.

Az $SABC$ tetraéder alaplapjának az SAC háromszöget választva, ennek S -nél levő szöge 2α , így az SA -ra C -ből bocsátott magasság hossza $SC \sin 2\alpha = c \sin 2\alpha$, az alaplap területe tehát $\frac{1}{2} ac \sin 2\alpha$. A B csücsből az alapra bocsátott magasság hossza viszont $b \sin \alpha$. Így a tetraéder térfogatát V_4 -gyel jelölve

$$V_4 = \frac{1}{6} a b c \sin 2\alpha \sin \alpha.$$

Az első bekezdésben szereplő másik három tetraéder V_2 , V_3 , V_1 térfogatára $V_2 = \frac{1}{6} a c d \sin 2\alpha \sin \alpha$, $V_3 = \frac{1}{6} a b d \sin 2\alpha \sin \alpha$, $V_1 = \frac{1}{6} b c d \sin 2\alpha \sin \alpha$. A $V_1 + V_3 = V_3 + V_4$ egyenletet $\frac{1}{6} a b c d \sin 2\alpha \sin \alpha$ értékkel osztva, a bizonyítandó

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

egyenletet kapjuk.

Megjegyzés: Ha a gúla alapja nem négyzet, hanem téglalap, akkor a fenti megfontolásban, csak annyi változik, hogy egy oldalél a két vele szomszédos oldalél síkjával, valamilyen α -tól különböző β szöget zár be, de ez az érték mind a négy oldalélre ugyanaz. Így a fentiekben a térfogatokban szereplő utolsó tényező $\sin \alpha$ helyett $\sin \beta$ lesz, ami a végkövetkeztetésen nem változtat. A feladat állítása tehát téglalap alapú egyenlő oldalélű gúlára is érvényes.

II. megoldás. A négyszögmetszet AC átlója benne van az SAC síkban, BD átlója pedig az SBD síkban, ezen átlók M metszéspontja tehát a két sík metszévonalán van, az pedig az $SA_0B_0C_0D_0$ gúla S -ből induló testmagasságának egyenesese, amely az oldalélekkel egyenlő α szögeket zár be (1. ábra). Így SM közös szögfelezője az ASC és BSD háromszögeknek, amelyeknek S -nél levő szöge egyaránt 2α .

Ha e két háromszöget SM körül egymásra forgatva képzeljük (ez az egymásra forgatás akkor is elvégezhető, ha az $A_0B_0C_0D_0$ alaplap téglalap), a feladat állítása a következő síkbeli állítással fogalmazható át: *Ha egy szög felező egyenesének egy pontján át húzott két szelő a szög száraiból a csúcstól számítva a és c, illetőleg b és d hosszúságú szakaszokat metsz le, akkor*

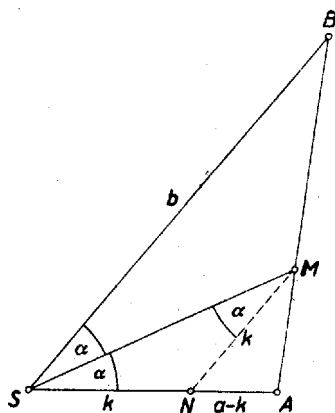
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Ez még úgy is fogalmazható, hogy a szárazból lemetsett szakaszok reciprokok értékeinek összege független a szelő irányától. Erre az állításra számos egyszerű, trigonometriát nem használó, megoldás adható.)¹

Legyen ASB a kérdéses szög, a szögfelező messe az AB szakaszt M -ben (2. ábra).

¹ A feladat az előbbi szövegezésben szerepelt 407. feladatként. Két megoldás található a IV. kötet 4–5. (1952. májusi) számában a 134–135. oldalon.

A második formában a feladat lényegében benne foglaltatik a 706. feladatban, amelynek megoldását lásd a XII. kötet 4. (1956. április) számában a 110–112. oldalon.



2. ábra

Húzzunk M -en át párhuzamost BS -sel. Messe ez az SA -t N pontban. Az SNM háromszög S -nél és M -nél fekvő szöge egyaránt α , így a háromszög egyenlőszárú. Az egyenlő SN és MN távolságokat jelöljük k -val. Ekkor $AN = a - k$, és a hasonló ASB és ANM háromszögekből

$$\frac{a}{b} = \frac{a - k}{k} = \frac{a}{k} - 1.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva és a -val osztva

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}.$$

Mivel k hossza csak az SM hosszától és α nagyságától függ, az AB szelő irányától nem, így állításunkat bebizonyítottuk.

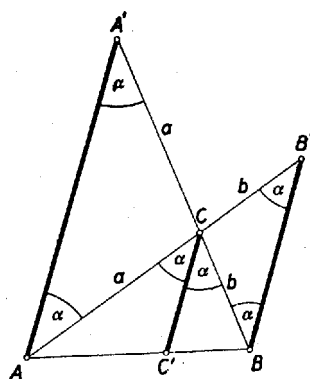
Megjegyzések: 1. Ha tetszés szerinti egyenlő oldalélű gúlát veszünk, akkor az alapsokszög körbeírható, a testmagasság talppontja e kör középpontja, és az oldalélek egyenlő α szöget zárnak be a testmagassággal. Ha még az alapsokszög szimmetrikus is a kör középpontjára, vagyis a szemközti csúcsokat összekötő átlók egy ponton, a kör középpontján mennek keresztül, akkor egy síkkal elmetszve ez összes oldaléleket, a keletkező sokszögmetszet szemközti csúcsait összekötő átlók is egy ponton mennek keresztül, és ez a pont a testmagasságon van. Így kiválasztva egy szemközti élpárt a rajtuk átfektetett síkban egy háromszög keletkezik, melyben a 2α szög felezőjének hossza a testmagasságnak a metsző síkig terjedő darabja, vagyis mindegyik háromszögben ugyanakkora. Így a bebizonyított tételt alkalmazhatjuk az összes szemközti élpárra és azt kapjuk:

Ha egy egyenlő oldalélű gúla alapja centrálisan szimmetrikus sokszög (és így szükségképpen páros oldalszámú), akkor egy minden oldalélt metsző síkot véve, a szemközti élpárokból lemetsett darabok reciprok értékeinek összege minden élpárra ugyanakkora.

2. A II. megoldásban bizonyított síkbeli tétel következik az 1905. évi Eötvös-verseny 3. feladatának)² állításából is, mely szerint egy ABC háromszög csúcsain át párhuzamosan elmetszve a szemközti oldalegyeneseket, egy-egy A' , B' , C' pontban, de úgy, hogy C' A és B közt legyen (3. ábra) fennáll az

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} = \frac{1}{CC'}$$

összefüggés.



3. ábra

²Kürschák J.: Matematikai Versenytételek I. rész. 2. kiadás. 77–78. old.

Ha itt CC' a C csúcsú 2α szög szögfelezője, akkor az ACA' és BCB' háromszögek C -vel szemközti oldalán fekvő szögei α -val egyenlők. Így a két háromszög egyenlő szárú és egymáshoz hasonló. Ezért $AC = CA' = a$, $BC = CB' = b$ és

$$\frac{a}{AA'} = \frac{b}{BB'} = r.$$

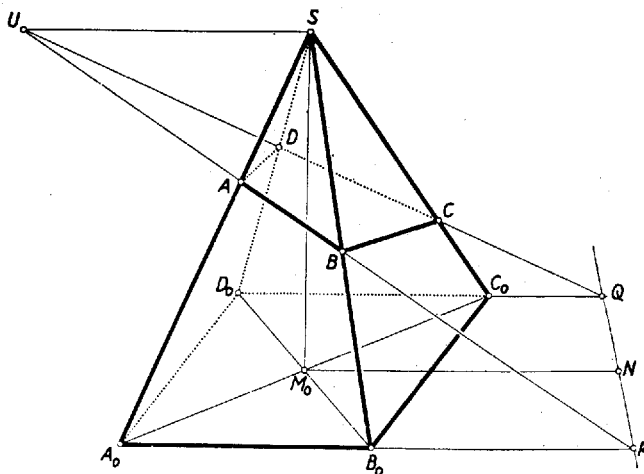
Innen AA' -t és BB' -t a fenti egyenletbe helyettesítve

$$\frac{r}{a} + \frac{r}{b} = \frac{1}{CC'}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r \cdot CC'}.$$

A jobb oldalon r csupán az α szög nagyságától függ, így mindazon háromszögekben, amelyek a 2α szögben és az ebből induló CC' szögfelező hosszában megegyeznek, a 2α szöget bezáró oldalak reciprok értékeinek összege egyenlő.

III. megoldás: A feladat állítását a testmagasság segítségével vétele nélkül is bebizonyíthatjuk.

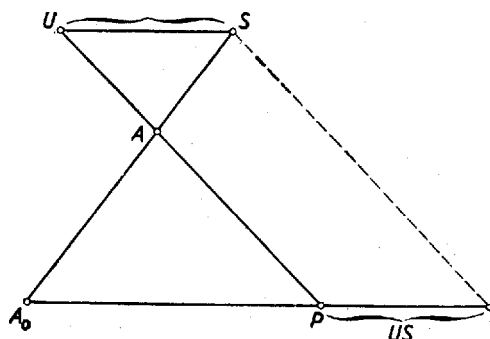
Ha a metsző sík párhuzamos az alappal, akkor az oldalélekből egyenlő szakaszokat metsz le, s így a feladat állítása magától értetődő. Ha ez nem áll, akkor messe egymást, pl. AB és CD egy U pontban (4. ábra).



4. ábra

US az A_0B_0S és C_0D_0S síkok metszésvonalán van, ez pedig párhuzamos a két síkban húzható, egymással párhuzamos egyenesekkel, így az A_0B_0 és a C_0D_0 egyenesekkel. Messe az AB az A_0B_0 -t P -ben, CD pedig C_0D_0 -t Q -ban. Az eredeti gúla oldaléleinek közös hosszát jelöljük e -vel. Ekkor az UP -vel elmetsett US , A_0P , és SA_0 egyenesekből álló alakzatból adódik, hogy (5. ábra)

$$\frac{e}{SA} = \frac{A_0P + US}{US}.$$



5. ábra

(Ez közvetlenül világossá válik, ha S -ből párhuzamost húzunk UP -vel.) Hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{e}{SB} = \frac{B_0P + US}{US}, \quad \frac{e}{SC} = \frac{C_0Q + US}{US}, \quad \frac{e}{SD} = \frac{D_0Q + US}{US}$$

$$e \left(\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} \right) = \frac{A_0P + C_0Q + 2US}{US},$$

$$e \left(\frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} \right) = \frac{B_0P + D_0Q + 2US}{US}.$$

A_0P és C_0Q az A_0PQC_0 trapéz párhuzamos oldalai, B_0P és D_0Q pedig a B_0PQD_0 trapéz párhuzamos oldalai, így összegük a megfelelő trapéz középvonalának kétszerese. A_0C_0 és B_0D_0 azonban egy paralelogramma átlói, s így M_0 metszéspontjuk mindkettőt felezi. Messe az M_0 -ból A_0B_0 -vel húzott párhuzamos PQ -t az N pontban, akkor tehát M_0N a két trapéz közös középvonala, és így

$$e \left(\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} \right) = \frac{2(M_0N + US)}{US} = e \left(\frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} \right),$$

amiből a bizonyítandó állítás (e -vel osztva) már következik.

Megjegyzések: 1. A bizonyításban hallgatólag feltettük, hogy a PQ egyenes nem metszi a gúla alapsokszögét, tehát az A, B, C, D pontok egyike sem esik a megfelelő él meghosszabbítására. Ez azonban nem lényeges megszorítás, mert az alapsíkot önmagával párhuzamosan eltolhatjuk addig, míg az összes metszéspontok az alapnégyszögön kívül esnek. Ezzel a metszősík által az élekből lemetezett szakaszok nem változnak, és így a fenti fennálló összefüggések sem. (Egyébként a bizonyítás változtatás nélkül érvényes erre az esetre is, ha az US -sel párhuzamos szakaszokat pozitívnak vagy negatívnak tekintjük, amint irányuk a csúcsok felírt sorrendje szerint megegyezik vagy ellentétes US irányával.)

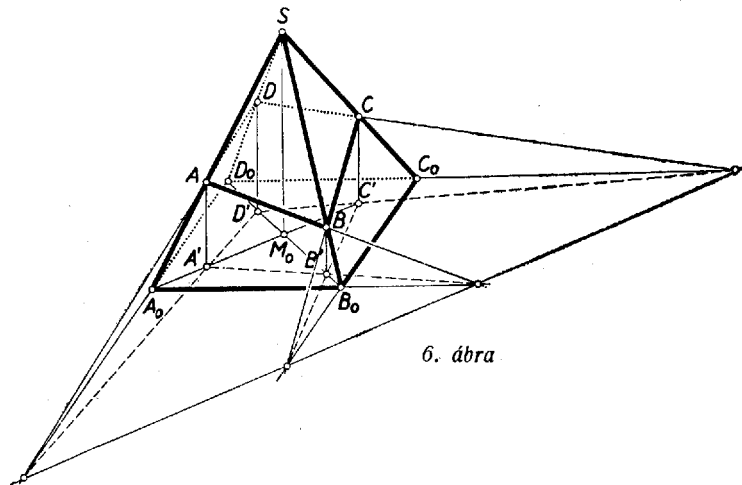
2. A bizonyításban csak egy helyen használtunk fel az alapról annál többet, hogy paralelogramma: mikor arra következtettünk, hogy a gúla oldalélei egyenlő hosszúságúak. Ha tetszés szerinti paralelogrammát megengedünk alapnak és a gúla csúcsa az átlók metszéspontjában az alapra emelt merőlegesen van, akkor is igaz annyi, hogy $SA_0 = SC_0$ (jelöljük hosszukat e -vel) és $SB_0 = SD_0 (= f)$. Ebben az esetben tehát a fenti levezetés annyit ad, hogy

$$e \left(\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} \right) = f \left(\frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} \right),$$

vagyis *egy paralelogramma alapú gúlát, amelynek csúcsa az átlók metszéspontjában emelt merőlegesen van, egy síkkal elmetszve, a szemközti élekből lemetezett szakaszok reciprokok értékének összege fordított arányban áll egymással, mint a megfelelő élpárok hossza:*

$$\left(\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} \right) : \left(\frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} \right) = f : e$$

3. Legyenek az A, B, C, D pontok merőleges vetületei az alaplapon A', B', C', D' . Ezek rendre az $M_0A_0, M_0B_0, M_0C_0, M_0D_0$ félegyenesre esnek, ahol M_0 az alapnégyszög átlóinak metszéspontja (6. ábra).



Az $A_0B_0, AB, A'B'$ egy ponton mennek keresztül. Megkeresve a B_0C_0, C_0D_0 és D_0A_0 -n a megfelelő metszéspontokat, ezek egy egyenesen, a metszősík és az alapsík metszévonalán sorakoznak. Könnyen látható, hogy az M_0 pontból a vesszős pontokig terjedő szakaszok közt is fennáll egy olyan összefüggés, amilyen a feladatban szerepel. (Erre vonatkozólag az olvasó a jövő számunkban talál egy kitűzött feladatot.)