

A háromjegyű osztandó és a kétjegyű osztó jegyeit x , y , z , ill. u , v -vel jelölve, a feltételek a következő alakban írhatók:

$$(1) \quad 100x + 10y + z = (10u + v)(u + v) + 10v + u,$$

$$(2) \quad 100z + 10y + x = (10v + u)(u + v) + 10u + v,$$

és mivel a maradék kisebb, mint az osztó, kell, hogy

$$(3) \quad u > v$$

legyen. Az (1)-ből levonva a (2)-t

$$(4) \quad 99(x - z) = 9(u - v)(u + v) + 9(v - u) = 9(u - v)(u + v - 1)$$

adódik, azaz

$$11(x - z) = (u - v)(u + v - 1).$$

A jobb oldal osztható 11-gyel. De $u - v$ nem lehet osztható 11-gyel, mert mint számjegyek különbsége, 10-nél kisebb, és (3) szerint pozitív. A 11 viszont prímszám, s így tudjuk, hogy ha osztója egy szorzatnak, akkor osztója valamelyik tényezőnek is. Így $u + v - 1$ osztható 11-gyel, de $2 \cdot 11$ -nél kisebb, mert u és v számjegyek, és 0 sem lehet, mert akkor – figyelembe véve (3)-at is – $10u + v = 10$ volna, ami nem megoldása a feladatnak. Így $u + v - 1 = 11$, azaz

$$(5) \quad u + v = 12,$$

és (1)-ből

$$100x + 10y + z = (10u + v) \cdot 12 + 10v + u = (9u + 12) \cdot 12 + 120 - 10u + u = 264 + 99u.$$

A bal oldal kisebb, mint 1000, tehát

$$99u \leq 999 - 264, \quad u \leq \frac{725}{99} = 7\frac{32}{99}.$$

A (3) egyenlőséget és (5)-öt figyelembe véve, innen $u = 7$, $v = 5$ adódik. Ezt beírva (1) és (2) jobb oldalába

$$(10u + v)(u + v) + 10v + u = 75 \cdot 12 + 57 = 957,$$

$$(10v + u)(u + v) + 10u + v = 57 \cdot 12 + 75 = 759.$$

Így azt kaptuk, hogy a feladatnak egy megoldása van, melyben az osztandó 957, az osztó 75.

Megjegyzés: Az (5) összefüggés birtokában közvetlenül meg tudjuk állapítani x , y és z -t is. Összeadva az (1) és (2) egyenlőségeket, és felhasználva (5)-öt

$$(6) \quad \begin{aligned} 101(x + z) + 20y &= 11(u + v)(u + v) + 11(u + v) = \\ &= 11(u + v)(u + v + 1) = 1716. \end{aligned}$$

A bal oldal 20-szal osztva $(x + z)$ -t, a jobb 16-ot ad maradékkal, tehát e két szám csak 20 egy többszörösében különbözhet, de mivel x és z számjegyek azért

$$(7) \quad x + z = 16$$

kell, hogy legyen, és ezt (6)-ba írva

$$y = 5$$

adódik. (4)-ből és (3)-ból következik, hogy szükségképpen

$$x > z.$$

16 két különböző egyjegyű összeadandóra csak $9 + 7$ alakban bontható, tehát $x = 9$, $y = 5$, $z = 7$, ebből (1) vagy (2) és (5) alapján u és v is meghatározható. A fentebb követett gondolatmenet azonban gyorsabban vezetett el a megoldáshoz.