

I. megoldás: Tekintsünk két tetszőleges, egyenlő területű téglalapot. Legyenek az oldalak a , b , ill. c , d , ahol $a + b = c + d$.

A feladat szerint megalkotva mindkettőből az 5 téglalapból álló idomot, ezek területe egyenlő:

$$ab + 2 \left(a \cdot \frac{a}{n} + b \cdot \frac{b}{n} \right) = cd + 2 \left(c \cdot \frac{c}{n} + d \cdot \frac{d}{n} \right),$$

vagyis

$$ab + \frac{2a^2 + 2b^2}{n} = cd + \frac{2c^2 + 2d^2}{n}.$$

Mindkét oldalt n -nel szorozva, és rendezve

$$\begin{aligned} n(ab - cd) &= 2[c^2 + d^2 - (a^2 + b^2)] = \\ &= 2[(c + d)^2 - (a + b)^2 - 2cd + 2ab]. \end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint $c + d = a + b$, azért

$$n(ab - cd) = 2(2ab - 2cd) = 4(ab - cd),$$

és így feltéve, hogy $ab - cd \neq 0$,

$$n = 4.$$

Ha $ab - cd = 0$, akkor az $a + b = c + d = s$ jelölést használva, $b = s - a$, $d = s - c$, és így

$$\begin{aligned} a(s - a) - c(s - c) &= as - a^2 - cs + c^2 = s(a - c) - (a^2 - c^2) = \\ &= (a - c)(s - a - c) = 0, \end{aligned}$$

ahonnan, vagy $c = a$, vagy $c = s - a$. Mindkét esetben a két téglalap egybevágó, és n értéke ez esetben tetszőleges.

II. megoldás: Legyenek a téglalap oldalai a és b . A feladat szerint képezett 5 téglalapból álló idom területe

$$T = ab + \frac{2a^2}{n} + \frac{2b^2}{n}.$$

Adjunk a jobboldalhoz $\frac{4ab}{n} - \frac{4ab}{n}$ -et, hogy behozhassuk az állandó $a + b$ kifejezést:

$$\begin{aligned} T &= ab + \frac{2a^2}{n} + \frac{4ab}{n} + \frac{2b^2}{n} - \frac{4ab}{n} = \frac{2(a^2 + 2ab + b^2)}{n} + ab - \frac{4ab}{n} = \\ &= \frac{2(a + b)^2}{n} + ab \left(1 - \frac{4}{n} \right). \end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $a + b$ állandó, akkor a jobboldal első tagja nem függ a téglalap alakjától, a második tag azonban akkor és csakis akkor nem függ külön-külön az a és b oldaltól (vagyis a téglalap alakjától), ha értéke 0, vagyis (mivel $ab \neq 0$)

$$1 - \frac{4}{n} = 0,$$

ahonnan

$$n = 4.$$

Ez esetben T állandó értéke

$$\frac{(a + b)^2}{2}$$

Megjegyzések: 1. A feladatot megoldó versenyzők legnagyobb része az 1. megoldás szerint dolgozott, de a diszkussziót ($ab - cd = 0$ esetén) már kevés versenyző végezte el. A II. megoldás szerint dolgozók pedig legtöbbször csak arra mutattak rá, mindjárt a $T = ab + \frac{2a^2}{n} + \frac{2b^2}{n}$ alakban, hogy $n = 4$ esetén $T = \frac{1}{2}(a + b)^2$ állandó, és egyáltalán nem törődtek azzal, hogy nem lehet-e T más n értékekre is független a téglalap alakjától.

2. Több versenyző rámutatott arra, hogy a feladat minden nehézség nélkül általánosítható a 90° -os téglalapról α szögű paralelogrammára, oly módon, hogy az oldal n -ed részével toldjuk meg mindkét irányban a szomszédos oldalt. Ez esetben az 5 téglalap mindegyikének területe, és így T is, az n -től független $\sin \alpha$ állandóval szorozódik.