

I. megoldás: A bizonyítandó állítás írható az

$$(1) \quad \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 0$$

alakban.

A baloldalt közös nevezőre hozva, majd a számlálót ismételten tényezőkre bontva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b}{a^2b^2} &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)}{a^2b^2} = \\ &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab)}{a^2b^2}, \end{aligned}$$

vagyis egyenlőtlenségünk így is írható

$$(2) \quad \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geq 0.$$

Mivel az $a = 0$, $b = 0$ értékek ki vannak zárva (mert különben az adott egyenlőtlenség értelmetlen volna), a^2b^2 mindig pozitív, $(a-b)^2$ nem lehet negatív, $(a+b)$ pedig a feltétel szerint pozitív, és így az (1)-gyel egyenértékű (2) helyessége nyilvánvaló. Az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $a = b$.

Megjegyzés. Lényegében ugyanezek az átalakítások keresztül jutunk célhoz akkor is, ha bizonyítandó egyenlőtlenséget összevonás után a feltétel szerint pozitív $\frac{a^2b^2}{a+b}$ értékkel szorozzuk, és azután redukáljuk 0-ra, vagy ha a két oldal különbségét úgy képezzük, hogy a két oldal megfelelő tagjainak különbségét képezzük először, amikor is egyszerű módon adódik a tényezőkre bontás. Lényegében ehhez az eljáráshoz csatlakozik a következő megoldás.

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk

$$pu + \frac{1}{p}v \geq u + v$$

alakban írható, ahol $p = \frac{a^2}{b^2}$, $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{1}{b}$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetekben áll fenn ez az egyenlőtlenség, ha $p \geq 1$, és $u > 0$. A két oldal különbsége (mely tehát nem lehet negatív):

$$pu + \frac{1}{p}v - u - v = (p-1)u + \left(\frac{1}{p} - 1\right)v = (p-1)\left(u - \frac{v}{p}\right).$$

Ez 0, ha $p = 1$. Ellenkező esetben az első tényező feltétel szerint pozitív, tehát a második sem lehet negatív:

$$u \geq \frac{v}{p} \quad \text{azaz, mivel} \quad u > 0, \quad p > 0, \quad p \geq \frac{v}{u}.$$

Az egyenlőtlenség tehát helyes, ha p sem 1-nél, sem $\frac{v}{u}$ -nál nem kisebb. A versenyfeladat esetében feltehetjük, hogy $a \geq b$, a feladat feltétele szerint pedig $a > -b$. A kettőből ekkor

$$a \geq |b|, \quad \frac{a}{|b|} \geq 1, \quad \frac{a^2}{b^2} \geq 1.$$

Így $p = \frac{a^2}{b^2}$, $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{1}{b}$ választás mellett

$$p \geq 1, \quad \text{másképpen} \quad p = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{|b|} \cdot \frac{a}{|b|} \geq \frac{a}{|b|} \geq \frac{a}{b} = \frac{v}{u}$$

végül az $a \geq |b| \geq 0$ (és nyilván $a \neq 0$) folytán $u = \frac{1}{a} > 0$. Így alkalmazható eredményünk, és a bizonyítandó egyenlőtlenség, helyességét adja. Ezzel állításunkat egy valamivel általánosabb egyenlőtlenség következményeként kaptuk.

Megjegyzés. Számos megoldás nem volt teljes értékű, mert szerzője, szorozva vagy osztva $(a+b)$ -vel, nem hangsúlyozta, hogy $a+b > 0$. Természetesen kimondottan hiba, ha a versenyző kiemelte, hogy $a+b \neq 0$, mert ezzel elárulta, hogy nincs tisztában azzal, hogy egyenlőtlenségek szorzásánál (osztásánál) lényeges a szorzó (ill. osztó) előjele.

Sajnos, még gyakoribb volt az a megsemmisítő hiba, hogy versenyző ab -vel mint pozitív számmal szorozott vagy osztott, holott ab előjeléről nem tudunk semmit.