

A feladat megoldására a versenyzők többsége felhasználta a háromszög alkotórészei közti legkülönbözőbb összefüggéseket és sokan hosszabb számítások után jutottak csak el a feladat igazolásához.

Ezen megoldási módok közül talán a legegyszerűbb a sinus és cosinus-tétel felhasználásával az oldalakat közvetlenül bevonni a számításunkba.

I. megoldás: Mivel

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1,$$

azért

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 3.$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$(1) \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \geq 4.$$

Szorozzuk meg (1)-et $\sin^2 \gamma$ -val

$$\frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} + 1 \geq 4 \sin^2 \gamma = 4(1 - \cos^2 \gamma) = 4 - 4 \cos^2 \gamma.$$

A sinus-tétel, ill. cosinus-tétel alapján ez az egyenlőtlenség így is írható

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1 \geq 4 - 4 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 = 4 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{a^2 b^2}.$$

Mindkét oldalt $a^2 b^2$ -tel szorozva

$$b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2 \geq 4a^2 b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2),$$

azaz rendezve

$$(2) \quad a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2.$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva, és 0-ra redukálva

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 \geq 0,$$

ami így is írható

$$(3) \quad (a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geq 0.$$

Ez azonban nyilvánvaló, mert valós számok négyzete nem lehet negatív. Egyenlőség jele csak $a = b = c$ esetén érvényes.

Mivel csupa egyenértékű átalakítást végeztünk, azért (3)-ból kiindulva visszafelé következtetve (1)-hez jutunk. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Sok versenyző jutott el (2)-höz, de a befejező lépést nem találta meg.

II. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség baloldalát alakítsuk át a következőképpen

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma &= \frac{1}{2} [(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta) + (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma) + \\ &+ (\operatorname{ctg}^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} [(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma)^2 + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha)^2] + \\ &+ \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg} \gamma = -\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

és ebből $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ -vel szorozva és átrendezve

$$(4) \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Ezt a fent nyert azonosságba helyettesítve

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma = 1 + \frac{1}{2} [(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma)^2 + (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha)^2] \geq 1.$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a három cotangens érték egyenlő, ami egy háromszög szögeire csak úgy következhetik be, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

A cotangensek négyzetösszege a minimális 1 értéket tehát egyedül a szabályos háromszögre veszi fel.

Megjegyzés: Felhasználhatjuk közvetlenül a számtani és mértani közép közötti – a tananyagból ismert – egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma}{2} + \\ &+ \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2} \geq \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Most már csak (4)-et kell bizonyítanunk. (A II. megoldás második átalakítása ennek a bizonyítását tartalmazza.)