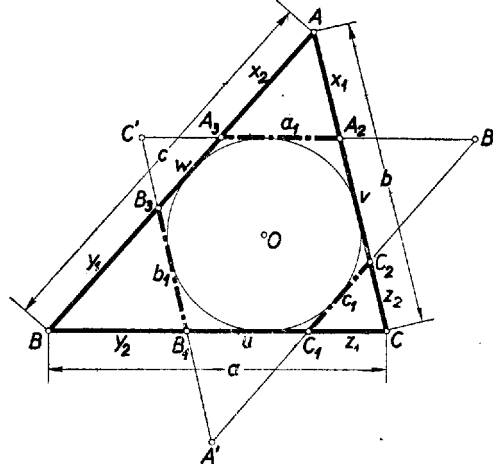


I. megoldás: Az a_1, b_1, c_1 szakaszok által az adott $ABC\triangle$ -ből lemetezett háromszögek nyilvánvalóan hasonlóak az $ABC\triangle$ -höz. A jelölést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ennek alapján

$$x_1 : b = a_1 : a$$

amiből

$$x_1 = \frac{a_1}{a}b.$$

Hasonlóképpen

$$x_2 = \frac{a_1}{a}c, \quad y_1 = \frac{b_1}{b}c, \quad y_2 = \frac{b_1}{b}a, \quad z_1 = \frac{c_1}{c}a, \quad z_2 = \frac{c_1}{c}b.$$

Az $ABC\triangle$ kerülete:

$$(u + v + w) + (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = k.$$

Az érintő hatszög tétele szerint

$$u + v + w = a_1 + b_1 + c_1,$$

és így

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 + c_1) + \frac{a_1}{a}(b + c) + \frac{b_1}{b}(a + c) + \frac{c_1}{c}(a + b) &= \\ = a_1 + b_1 + c_1 + \frac{a_1}{a}(k - a) + \frac{b_1}{b}(k - b) + \frac{c_1}{c}(k - c) &= \\ = a_1 + b_1 + c_1 + \frac{a_1}{a}k + \frac{b_1}{b}k + \frac{c_1}{c}k - a_1 - b_1 - c_1 &= \\ = k \left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} \right) &= k. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt k -val osztva a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

II. megoldás: Az előző megoldásban szereplő

$$y_2 = \frac{b_1}{b}a, \quad z_1 = \frac{c_1}{c}a$$

összefüggéseket fogjuk felhasználni, emellett megmutatjuk, hogy

$$a_1 = u.$$

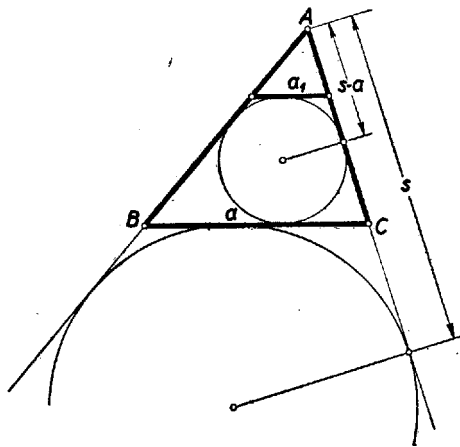
Ebből már következik az állítás, ha az

$$a = y_2 + u + z_1 = \frac{b_1}{b}a + a_1 + \frac{c_1}{c}a$$

összefüggést a -val osztjuk.

A bizonyítandó egyenlőség igazolására hosszabbítsuk meg az a_1, b_1, c_1 egyeneseket, míg metszik egymást. A keletkező $A'B'C'\triangle$ oldalai párhuzamosak az $ABC\triangle$ megfelelő oldalaival, és beírt körük közös. Így a kiegészített ábra centrálszimmetrikus a beírt kör O középpontjára nézve. Tehát az u és a_1 szakaszok is egymás tükörképei O -ra nézve, amivel állításunkat igazoltuk.

III. megoldás: Egészítsük ki az ábrát az AB oldalt és a másik két oldal meghosszabbítását érintő körrel (2. ábra).



2. ábra

A háromszög területét $2s$ -sel jelölve tudjuk, hogy a C csúcsból a két körhöz húzott érintő szakaszok hossza $s - a$ és s . A beírt kör a C csúcsnál az a_1 szakasszal levágott kis háromszögnek hozzáírt köre. Így e kis háromszögből és körből álló ábrarész hasonló az ABC háromszögből és hozzáírt köréből álló ábrarészhez. A kettőben egymásnak megfelelő szakaszok aránya tehát egyenlő. Így

$$\frac{a_1}{a} = \frac{s - a}{s}.$$

Hasonlóan

$$\frac{b_1}{b} = \frac{s - b}{s}, \quad \frac{c_1}{c} = \frac{s - c}{s}.$$

Ezeket összeadva

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{3s - (a + b + c)}{s} = \frac{3s - 2s}{s} = 1.$$

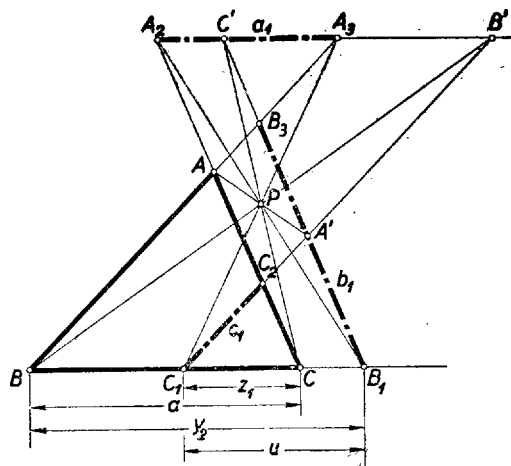
Megjegyzések: 1. Néhány versenyző rámutatott, hogy tételünk a hozzáírt kör esetén is érvényes, ha a keletkező szakaszokat előjellel vesszük. Egy még messzebb menő általánosítást adott *Udvari András*. Megfogalmazásához először is tekintsünk két párhuzamos szakaszt egyező vagy ellenkező előjelűnek aszerint, amint a két szakasz kezdőpontjától a végpont felé mutató irány megegyezik, vagy ellentétes.

Legyen egy ABC háromszögnek valamely, a síkjában fekvő, P pontjára vonatkozó tükörképe $A'B'C'\Delta$ és jelölje $A'B'$ metszéspontját BC -vel és CA -val C_1 , illetve C_2 -vel, $B'C'$ metszéspontját CA -val és AB -vel A_2 ill. A_3 , végül $C'A'$ metszéspontját BA ill. BC -vel B_3 , ill. B_1 -gyel, ekkor

$$(1) \quad \frac{A_2A_3}{CB} + \frac{B_3B_1}{AC} + \frac{C_1C_2}{BA} = 1.$$

Az 1. ábrában a P szerepét O tölti be; ez esetben mind a három arányszám pozitív és az (1) helyességét az I., II., III. megoldásokban bebizonyítottuk.

Az általános esetet a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Mivel a pontra való tükrözés egy szakaszt ugyanakkora, de ellenkező előjelű szakaszba visz át:

$$\begin{aligned}\frac{A_2A_3}{CB} &= -\frac{A_2A_3}{BC} = \frac{B_1C_1}{BC}, \\ \frac{B_3B_1}{AC} &= \frac{BB_1}{BC}, \\ \frac{C_1C_2}{BA} &= \frac{C_1C}{BC}.\end{aligned}$$

E három egyenlőség összeadásából adódik

$$\frac{A_2A_3}{CB} + \frac{B_3B_1}{AC} + \frac{C_1C_2}{BA} = \frac{B_1C_1 + BB_1 + C_1C}{BC} = \frac{BB_1 + B_1C_1 + C_1C}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

2. Egy térbeli általánosításra mutatott rá *Zsombok Zoltán*. Lásd a 772. sz. feladatot a 29. oldalon.