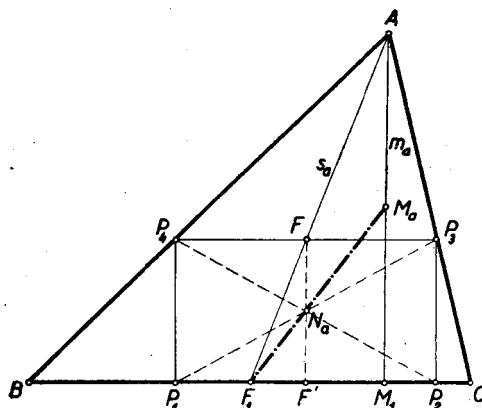


3. feladat a) része

I. megoldás: Vizsgáljuk meg az ABC_Δ $BC = a$ oldalán nyugvó beírt téglalapok középpontjainak mértani helyét. Legyen egy ilyen téglalap $P_1P_2P_3P_4$. A betűzést az 1. ábra mutatja.

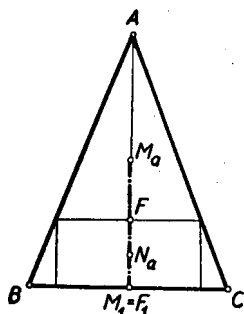


1. ábra

A P_3P_4 oldal F felezőpontja, mint ismeretes, rajta van az $AF_1 = s_a$ súlyvonalon. FF' a téglalap P_1P_2 oldalára merőleges (tehát az AM_1 magasságvonallal párhuzamos) középvonala. A téglalap N_a középpontja e középvonal felezőpontja, és így rajta van az AM_1F_1 derékszögű háromszög F_1M_a súlyvonalán, ahol M_a az $AM_1 = M_a$ magasság felezőpontja.

Megfordítva legyen N_a az F_1M_a szakasz tetszés szerinti belső pontja. Tegyük fel, hogy a háromszög nem egyenlőszárú. Húzzunk az N_a ponton át az a egyenesre merőleges egyenest, legyen ennek az a és az AF_1 egyenesek közé eső szakasza $F'F$. Ennek N_a felezőpontja, mert az AF_1M_1 háromszög F_1M_a súlyvonalán van és $F'F$ párhuzamos az ABC háromszög AM_1 magasságával. Hasonlóan látható, hogy az F pont felezi a rajta át a -val párhuzamosan húzott egyenesnek az AC és AB vonalak közé eső P_3P_4 szakaszát. A végpontokból az a egyenesre P_3P_2 és P_4P_1 merőlegeseket bocsátva tehát olyat téglalapot kapunk, amelynek N_a a középpontja és amely az ABC háromszögbe van írva a kívánt módon. Több ilyen téglalap nem lehetséges, mert ha a P_3P_4 oldalt közelítjük az a oldalhoz, illetőleg távolítjuk attól, akkor a középpont is közeledik, illetőleg távolodik, tehát különbözni fog N_a -tól.

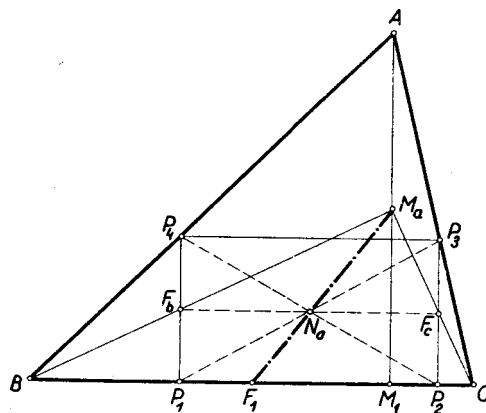
Ha az ABC háromszög egyenlőszárú ($AB = AC$), akkor a szimmetria alapján könnyen látható (2. ábra), hogy a téglalapok középpontjai az M_1M_a szakaszra esnek, másrészt ennek bármely N_a belsőpontjára tükrözve az $M_1 (= F_1)$ pontot, az F tükörképen át a -val párhuzamosan húzott egyenesnek a szárakkal való metszéspontjaiból az a oldalra bocsátott merőlegesek ismét egy kívánt tulajdonságú téglalapot adnak.



2. ábra

Az F_1 és M_a végpontokhoz tartozó téglalapok az a oldallá, illetőleg az M_a magasságvonallá fajulnak. A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

II. megoldás: A téglalap középpontja felfogható a másik, P_1P_2 -vel párhuzamos, F_bF_c középvonal felezőpontjaként is (3. ábra).



3. ábra

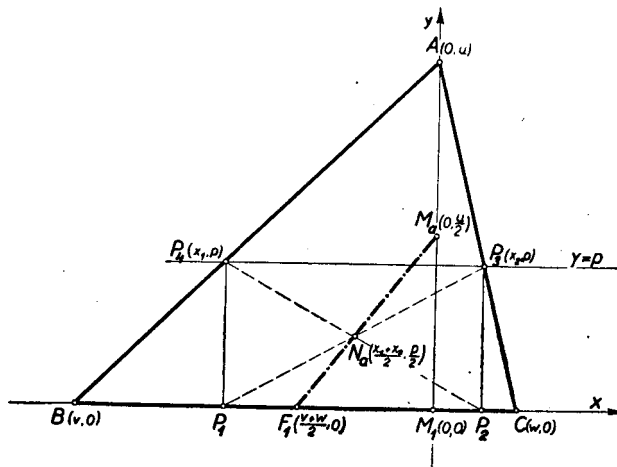
Nyilvánvaló, hogy F_b , mint P_1P_4 felezőpontja rajta van az AM_1B derékszögű háromszög BM_a súlyvonalán, F_c pedig az AM_1C háromszög CM_a súlyvonalán. Így az F_bF_c középvonal N_a felezőpontja rajta van a BM_aC_Δ -nek M_aF_1 súlyvonalán.

Ismét könnyen látható a gondolatmenet megfordításával, hogy az F_1M_a szakasz minden pontjához tartozik pontosan egy kívánt elhelyezkedésű téglalap, amelynek a kiszemelt pont a középpontja.

*

Mint a fenti két megoldásból látható, a keresett mértani hely teljesen elemi úton, minden koordináta-geometria nélkül meghatározható. Minthogy igen sok versenyző használt koordináta-geometriát, mégpedig legtöbbször igen ügyetlenül, és gyakran még a helyes eredménynek sem tudott geometriai értelmet adni, azért itt közlünk egy egyszerű megoldást koordináta-geometriában.

III. megoldás: Helyezzük el hegyesszögű háromszögünket a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a BC oldal az x tengelyre, az A csúcspont a pozitív tengelyre kerüljön. A betűzést a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Legyen a P_3P_4 téglalapoldal egyenlete $y = p$, a P_4 pont koordinátái (x_1, p) és P_3 ponté (x_2, p) akkor N_a , a téglalap középpontjának koordinátái $x_a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_a = \frac{p}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete

$$(1) \quad y = -\frac{u}{v}x + u, \quad \text{azaz} \quad ux + vy = uv,$$

Az AC egyenes egyenlete

$$(2) \quad y = -\frac{u}{w}x + u, \quad \text{azaz} \quad ux + wy = uw,$$

y helyébe a P_3 illetve P_4 pont p ordinátáját írva, (1)-ből, illetve (2)-ből x értékül x_1 -et, illetve x_2 -t kell kapnunk, tehát

$$ux_1 + vp = uv \quad \text{és} \quad ux_2 + wp = uw.$$

A kettőt összeadva

$$u(x_1 + x_2) + (v + w)p = u(v + w)$$

Mivel $x_1 + x_2$ és p az N_a pont x_a és y_a koordinátáinak kétszeresei, így azt kaptuk, hogy e koordinátákra

$$(3) \quad 2ux_a + 2(v + w)y_a = u(v + w),$$

vagyis (explicit alakra térve át) N_a koordinátái kielégítik az

$$y = -\frac{u}{v + w} \left(x - \frac{v + w}{2} \right)$$

egyenletet, feltéve, hogy $v + w \neq 0$.

Ez az egyenes átmegy a $\left(\frac{v + w}{2}, 0 \right)$ ponton, vagyis a BC oldal F_1 felezőpontján, és iránytangense $-\frac{u}{v + w} = -\frac{u}{2} \cdot \frac{v + w}{v + w}$, de ez nem más, mint F_1 -ből a $\left(0, \frac{u}{2} \right)$ pontba, a magasságvonal M_a felezőpontjába vivő egyenes iránytangense.

Az N_a pont tehát ezen az egyenesen mozog, és mivel p pozitív és u -nál kisebb, így y_a pozitív és $\frac{u}{2}$ -nél kisebb, x_a pedig $\frac{v + w}{2}$ és 0 között változik, mert y_a két szélső értékéhez $x_a = \frac{v + w}{2}$ (ha $y_a = 0$), illetőleg $x_a = 0$ (mikor $y_a = \frac{u}{2}$) értékek tartoznak.

A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

Ha $v + w = 0$, vagyis egyenlőszárú a háromszög, akkor (3)-ból

$$x_a = 0,$$

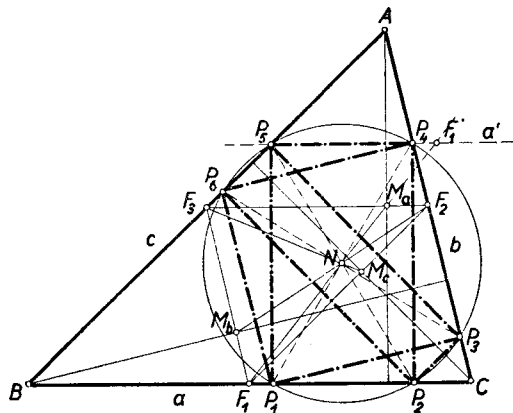
továbbá most is $0 < y_a < \frac{u}{2}$. A mértani hely tehát most is az $F_1M_a (= M_1M_a)$ szakasz.

Megjegyzés: Ha megengedjük, hogy a beírt téglalapok csúcspontjai a háromszögoldalok meghosszabbításán is lehetnek, akkor a háromszög tompaszögű is lehet, és a mértani hely a teljes F_1M_a egyenes.

3. feladat b) része

I. megoldás: A téglalap köré írt kör középpontja a téglalap középpontja, a téglalap átlója pedig átmérője a körnek. Így a keresett téglalapok középpontjának közösnek kell lennie, átlóiknak pedig egyenlőknek – ha vannak egyáltalán ilyen téglalapok.

Két téglalap közös középpontja a feladat a) része szerint csak két háromszögoldalhoz meghatározott mértani helyek közös pontja lehet. Mivel az adott háromszög feltétel szerint hegyesszögű, a magasságvonalak M_a , M_b , és M_c felezőpontjai az oldalközéppontok alkotta $F_1F_2F_3$ háromszög oldalainak belső pontjai (5. ábra), az F_1M_a és F_2M_b szakaszok tehát e háromszög transzverzálisai, s így metszik egymást egy N pontban.



5. ábra

Legyen az ABC háromszögbe írt N középpontú és a oldalon nyugvó téglalap $P_1P_2P_4P_5$. Tudjuk, hogy van ilyen téglalap és csak egy.

A P_1 és P_4 pontok, mint átlóvégpontok, egymás tükörképei az N pontra vonatkozóan. Mivel pedig a b egyenesnek csak egy olyan pontja van, amelynek N -re vonatkozó tükörképe a BC egyenesen van, így P_4 ez a pont.

Az N pont rajta van az F_2M_b egyenesen is, tehát írható az ABC háromszögbe olyan N középpontú téglalap is, amelyik a b oldalon nyugszik. Ennek egyik b -n levő csúcsával átellenes csúcs az a oldalon lesz és ezek egymás tükörképei az N pontra nézve, így az előző megjegyzés szerint e csúcspárt csak a P_4 és P_1 pontok adhatják. Legyen a kérdéses b oldalon nyugvó beírt téglalap $P_3P_4P_6P_1$. Ekkor a $P_3P_6 = P_1P_4$, mint a téglalap átlói, továbbá $P_1P_4 = P_2P_5$, mint a $P_1P_2P_4P_5$ téglalap átlói. Mindhárom átlót felezi az N pont.

Ekkor a $P_5P_6P_2P_3$ négyszög átlói is felezik egymást és egyenlők, tehát a négyszög téglalap; az ABC háromszögbe írt olyan téglalap, amelynek N a középpontja és egyik oldala az $AB = c$ háromszögoldalán van. A három téglalap középpontja közös, átlói egyenlők, tehát körülírt körük közös.

A feladat *a)* része I. megoldásának második felét is figyelembe véve, a fenti gondolatmenet módot ad a téglalapok megszerkesztésére is (5. ábra). Ilyen téglalap-hármas csak egy lehet, mert az N pont egyértelműen meg van határozva, ennek helyzete pedig egyértelműen meghatározza a téglalapokat.

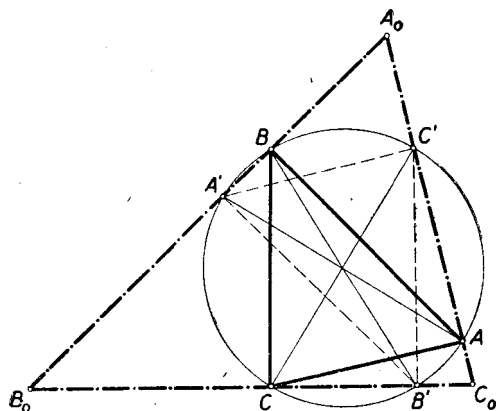
Mivel N középpontja mindhárom téglalapnak, eredményünkéből az is következik, hogy az F_1M_a , F_2M_b , F_3M_c mértani helyek egy ponton mennek keresztül.

II. megoldás: A mértani helyek felhasználása nélkül is megoldható feladatunk. Ha a $P_1P_3P_5\Delta$ -et tekintjük (5. ábra), akkor látjuk, hogy a P_1 -nél levő szög, mint merőleges szárú szög, egyenlő az $ABC\Delta$ -nek C -nél fekvő γ szögével. Ugyanezen oknál fogva a $P_1P_3P_5\Delta = \alpha$, és $P_3P_5P_1\Delta = \beta$, és így

$$P_3P_5P_1\Delta \sim ABC\Delta.$$

A $P_6P_2P_4$ háromszög a $P_3P_5P_1$ háromszögnek a körük írt kör középpontjára vonatkozó tükörképe. Ezt a megfigyélést felhasználva a következőképpen szerkeszthetünk a keresett ábrához hasonlót (amit azután alkalmasan elforgatva és kicsinyítve már könnyen megszerkeszthetjük a keresett téglalapokat).

Rajzoljunk az $ABC\Delta$ köré kört; ebben a csúcsokkal átellenes pontok legyenek A' , B' , C' (6. ábra).



6. ábra

Az AC' , BA' , CB' egyenesek alkotta $A_0B_0C_0\Delta$ oldalai merőlegesek az $ABC\Delta$ megfelelő oldalaira, s így a két háromszög hasonló. $ABA'B'$, $BCB'C'$ és $CAC'A'$ az előbbi háromszögbe beírt téglalapok, mert átlói (mint körátmérők) felezik egymást és egyenlők. Így valóban a keresett ábrához hasonlót nyertünk. (Magát a szerkesztést természetesen mindjárt az $A_0B_0C_0\Delta$ megrajzolásával kezdhethetjük; a szerkesztés igazolását szolgáló segédvonalak a szerkesztéskor elhagyhatók).

III. megoldás: A P_1 , P_6 , P_5 és P_4 pontok ismeretében (5. ábra) a másik kettő könnyen szerkeszthető (pl. mint P_6 és P_5 tükörképe a P_1P_4 szakasz felezőpontjára). E négy pont viszont P_1 ismeretében úgy szerkeszthető, hogy belőle a -ra merőlegest állítunk, illetőleg b -vel párhuzamost húzunk. Az előbbinek c -vel való P_6 metszéspontjából párhuzamost húzunk a -val, az utóbbinak c -vel való P_6 metszéspontjából merőlegest állítunk b -re. A kettő P_4 -ben metszi egymást.

Ha egy pontot sem ismerünk, akkor az a oldal tetszésszerű Q_1 pontjából kiindulva végezzük el az éppen leírt szerkesztést, a keletkezett metszéspontok legyenek sorra Q_5 , Q_6 , Q_4 (7. ábra).

