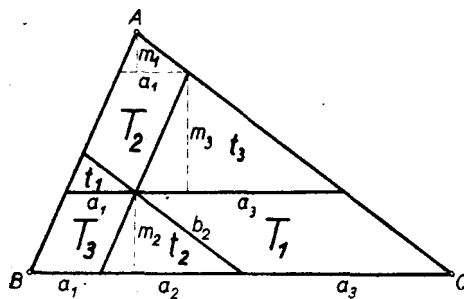


**I. megoldás:** Legyenek a keletkezett részháromszögeknek az adott háromszög  $a$  oldalával párhuzamos oldalai rendre  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  és ezen oldalakhoz tartozó magasságok  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Nyilvánvaló, hogy  $a_1 + a_2 + a_3 = a$ , és az is könnyen belátható, hogy  $m_1 + m_2 + m_3 = m$  (1. ábra), ahol  $m$  az adott háromszögnek  $a$  oldalához tartozó magassága.



1. ábra

Tehát az adott háromszög területét  $T$ -vel jelölve

$$(1) \quad 2T = am = (a_1 + a_2 + a_3)(m_1 + m_2 + m_3) = a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + (a_1m_2 + a_2m_1) + (a_1m_3 + a_3m_1) + (a_2m_3 + a_3m_2)$$

De  $2t_1 = a_1m_1$  és  $2t_2 = a_2m_2$ ; e két egyenlőség szorzata

$$(2) \quad 4t_1t_2 = a_1m_1a_2m_2 = (a_1m_2)(a_2m_1)$$

Mivel a részháromszögek – a szögek egyenlősége miatt – mind hasonlóak az adott háromszöghöz, és így egymás között is, azért

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad \text{vagyis} \quad a_1m_2 = a_2m_1.$$

Tehát (2) alapján

$$(a_1m_2)^2 = (a_2m_1)^2 = 4t_1t_2,$$

amiből

$$a_1m_2 = a_2m_1 = 2\sqrt{t_1t_2}, \quad \text{vagyis} \quad a_1m_2 + a_2m_1 = 4\sqrt{t_1t_2}.$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy

$$a_1m_3 + a_3m_1 = 4\sqrt{t_1t_3} \quad \text{és} \quad a_2m_3 + a_3m_2 = 4\sqrt{t_2t_3}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve, és 2-vel osztva

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_1t_2} + 2\sqrt{t_1t_3} + 2\sqrt{t_2t_3} = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3})^2.$$

*Megjegyzés:* Ha a keletkezett 3 paralelogramma területeit  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ -mal jelöljük, amint azt az ábra mutatja, akkor az ábrából közvetlenül leolvasható, hogy

$$a_1m_2 (= 2\sqrt{t_1t_2}) = T_3, \quad a_3m_2 (= 2\sqrt{t_2t_3}) = T_1,$$

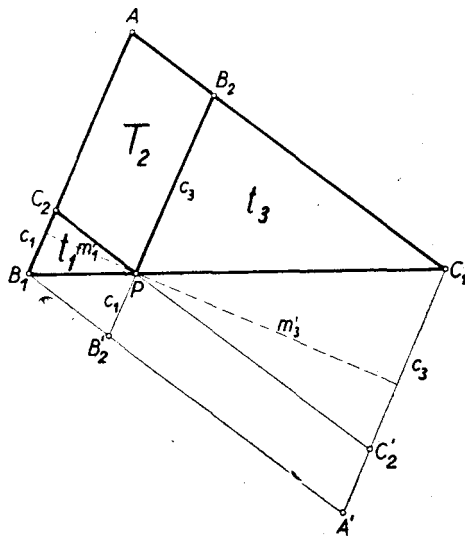
és könnyen belátható (kis területi átalakítás után), hogy

$$a_1m_3 (= 2\sqrt{t_1t_3}) = T_2,$$

Eszerint a fenti eredmény a  $T = t_1 + t_2 + t_3 + T_1 + T_2 + T_3$  egyenlőség alapján adódik.

Az itt felhasznált összefüggések közvetlen igazolásán (mégpedig a hasonlóság felhasználása nélkül) alapszik a következő megoldás.

**II. megoldás:** Tekintsük először az ábrának  $t_1$ ,  $t_3$  és  $T_2$  alkotta részét. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Egészítsük ki az  $AB_1C_1$  háromszöget, a  $B_1C_1$  oldal felezőpontjára tükrözve, paralelogrammává és hosszabbítsuk meg a  $B_2P$  és  $C_2P$  szakaszokat a paralelogramma szemközti oldaláig. Ekkor

$$B_1C_1A_\Delta \cong C_1B_1A'_\Delta, \quad PB_1C_{2\Delta} \cong B_1PB'_2\Delta, \quad C_1PB_{2\Delta} \cong PC_1C'_{2\Delta}$$

és így a  $C_2AB_2P$  paralelogramma  $T_2$  területe megegyezik a  $B'_2A'C'_2P$  paralelogrammáéval. Az előbbinek  $PB_2 = c_3$ , oldalához tartozó magassága egyenlő a  $t_1$  háromszög  $c_1$  oldalához tartozó  $m'_1$  magasságával; az utóbbi paralelogramma  $PB'_2 = c_1$  oldalához tartozó magassága pedig a  $t_3$  háromszög  $c_3$  oldalához tartozó  $m'_3$  magasságával. Tehát

$$T_2 = c_3m_1 = c_1m'_3,$$

amiből

$$T_2^2 = c_1m'_1c_3m'_3 = 4t_1t_3, \quad \text{vagyis} \quad T_2 = 2\sqrt{t_1t_3}.$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$T_1 = 2\sqrt{t_2t_3}, \quad T_3 = 2\sqrt{t_1t_2},$$

és így

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_2t_3} + 2\sqrt{t_3t_1} + 2\sqrt{t_1t_2} = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3})^2.$$

**III. megoldás:** Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, ha felhasználjuk azt az ismeretes tételt, mely szerint hasonló háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzete.

Tehát

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3),$$

$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3),$$

$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3).$$

Összeadva

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

ahonnan,

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T},$$

vagyis

$$T = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3})^2.$$