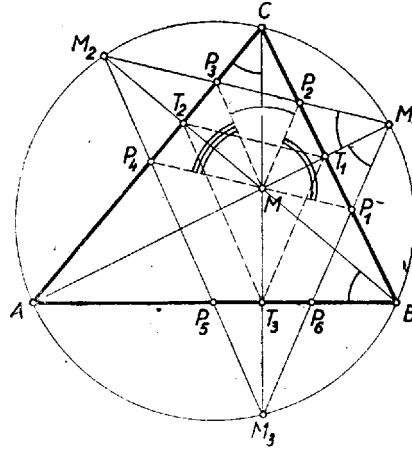


I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Először egy *segéd-tételt* bizonyítunk be. Ismert tétel alapján (Gallai-Péter I. oszt. tankönyv 1953 – 302. old.) az M_1 , M_2 , M_3 pontok rajta vannak az ABC_Δ köré írt körön. Mint merőlegesszárú szögek a B -nél levő egyíves szög egyenlő a C -nél levő egyíves szöggel, vagyis a kerületi szögek tétele alapján $\widehat{M_2A} = \widehat{AM_3}$ és így az M_1A egyenes felezi az $M_1M_2M_3_\Delta$, $M_1\angle$ -ét. Ugyanez áll az M_2B és M_3C egyenesekre is az $M_2\angle$, illetőleg $M_3\angle$ -ge1 kapcsolatban.

Ennek felhasználásával a feladat állítása így bizonyítható: Kössük össze az M pontot a keletkezett hatszög P_1 , P_2 , P_3 és P_4 csúcspontjaival. Az $MP_1M_1P_2$ négyszögben a P_1P_2 átló a tükrözés miatt felezi a P_1 és P_2 csúcspontoknál levő szögeket. Tehát a szóban forgó négyszögben a két átló egymásra merőleges és a segéd-tétel alapján *mindkét* átló egyúttal szögfelező, amiből következik, hogy az $MP_1M_1P_2$ négyszög rombusz, és így $P_1M \parallel M_1P_2$. Hasonlóképpen az $MP_4M_2P_3$ rombuszban $P_4M \parallel M_2P_3$.

De az M_1P_2 és M_2P_3 szakaszok rajta vannak az M_1M_2 egyenesen, amellyel a P_1M és P_4M szakaszok külön-külön párhuzamosak. A két utóbbi szakasznak egy közös pontja M , és így P_1 , M és P_4 egy egyenesen vannak, vagyis a P_1P_4 átló átmegy az M ponton. Ugyanígy bizonyítható ez a P_2P_5 , ill. P_3P_6 átlóra is.

Megjegyzés: Igen sok versenyző – a segéd-tétel nélkül – az átlók merőlegességéből és csak egyedül a P_1P_2 átló szögfelező voltából már rombuszra következtetett, megelégedve a deltoidról.

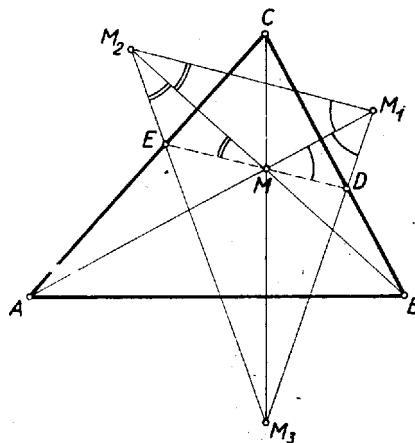
II. megoldás: Segéd-tételünkhöz a háromszög köré írt kör nélkül is eljuthatunk. Ugyanis, ha az adott ABC_Δ -nek $T_1T_2T_3$ talpponti háromszögét tekintjük (1. ábra), akkor nyilván az $M_1M_2M_3_\Delta$ a talpponti háromszögnek $2 : 1$ arányú nagyítása az M hasonlósági centrumból. Elég most már arra az ismert tételre hivatkozni (Gallai-Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 287-288. old.), hogy a háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.

Lényegében ezzel azonos bizonyítás: az M_1 , M_2 és M_3 pontokon át a BC , CA , ill. AB oldalakkal húzott párhuzamos egyenesek által alkotott $A_1B_1C_{1\Delta}$ -ben alkalmazzuk a talpponti háromszögre vonatkozó idézett tételt.

III. megoldás: Segéd-tételünk alapján $P_2T_1 = T_1P_1$, $P_3T_2 = T_2P_4$, $M_1T_1 = T_1M$ (1. ábra). Az M_1 , P_2 és P_3 pontok az M_1M_2 egyenesen vannak, a T_1T_2 egyenes pedig párhuzamos az M_1M_2 egyenessel, azért a P_1 , P_4 és M pontok rajta vannak az M_1M_2 egyenesnek a T_1T_2 egyenesre vonatkozó tükröképén, vagyis P_1 , P_4 és M egy egyenesen vannak.

IV. megoldás: Jelöljük az $M_1M_2M_3_\Delta$ szögeit $M_1\angle$, $M_2\angle$, ill. $M_3\angle$ -gel. Mivel – mint láttuk – $MP_1M_1P_2$ és $MP_4M_2P_3$ rombuszok (1. ábra), azért az M -nél fekvő két, ill. három ívvel jelölt szögek egyenlők $M_1\angle$ ill. $M_2\angle$ -gel. Az M -nél fekvő áthúzott ívvel jelölt szög pedig mint megfelelő szög, egyenlő $M_3\angle$ -gel. Tehát a $P_1MP_4\angle = M_1\angle + M_2\angle + M_3\angle = 180^\circ$, vagyis P_1 , M és P_4 egy egyenesen van.

V. megoldás: Húzzunk az M ponton át párhuzamost az M_1M_2 oldallal. Messe ez M_1M_3 -at D -ben, M_2M_3 -at E -ben. (2. ábra).

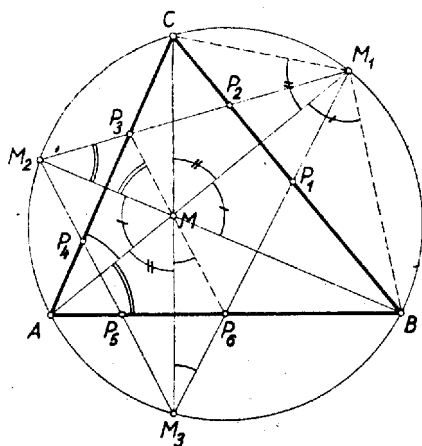


2. ábra

A segédétel alapján következik, hogy $DMM_1 \triangleleft = MM_1M_2 \triangleleft = MM_1M_3 \triangleleft$, tehát az MM_1D_Δ egyenlőszárú, s így D az MM_1 felező merőlegesén van. E felező merőleges azonban a BC egyenes, tehát D az M_3M_1 és BC egyenesek metszéspontja, vagyis a hatszög egyik csúcsa ($D = P_1$). Hasonlóan következik, hogy E a CA és M_2M_3 oldalak metszéspontja, amely a hatszögnek D -vel áttellenes pontja ($E = P_4$). Az ezeket összekötő átló tehát valóban M -en megy keresztül. Hasonlóan okoskodhatunk a többi átlókkal is. (Lényegében ez a gondolata Pátkai György bizonyításának).

A segédétel felhasználása nélkül, közvetlenül az M_1, M_2, M_3 pontokon átmenő kör segítségével is bizonyíthatjuk állításunkat, amint azt a VI – IX. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúcspontjával (3. ábra).

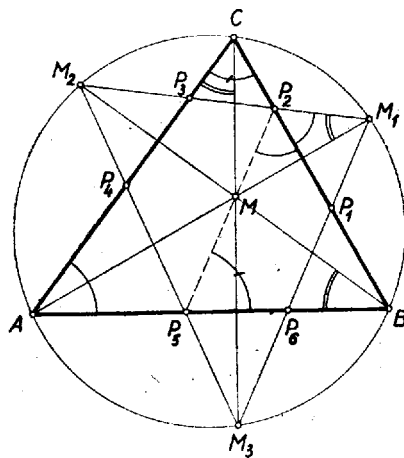


3. ábra

Az ABM_1C húrnégyszögben $A \triangleleft + M_1 \triangleleft = 180^\circ$. Tehát az A csúcsnál lévő, az ábrán egy ívvel, ill. két ívvel és az M_1 csúcsnál egyszer áthúzott, ill. kétszer áthúzott ívvel jelölt szögek, (szám szerint 4) összege 180° .

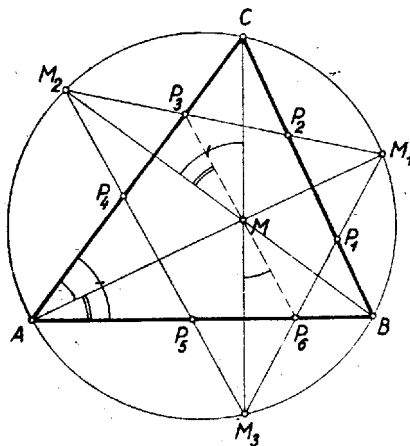
Az A -nál lévő egyíves szög, mint kerületi szög egyenlő az M_3 -nál lévő egyíves szöggel, ez pedig a tükrözés folytán egyenlő az M -nél lévő egyíves szöggel. Teljesen ugyanígy bizonyítható, hogy az A -nál lévő kétíves szög egyenlő az M -nél lévő kétíves szöggel. Az M_1 -nél lévő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, mint tükrös szög, ill. csúcsszög egyenlő az M -nél fekvő hasonló jelzésű szöggel. Ugyanez áll az M_1 -nél és M -nél lévő kétszer áthúzott ívvel jelölt szögekre is. De a $P_3MP_6 \triangleleft$ éppen e négyféle szög összege, vagyis $P_3MP_6 \triangleleft = 180^\circ$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a P_3P_6 átló átmegy az M ponton. (Tomor Benedek megoldása.)

VII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_2 és P_5 csúcspontjával. Be fogjuk bizonyítani, hogy a BP_2MP_5 négyszögben az $M \triangleleft = 180^\circ$ (4. ábra).



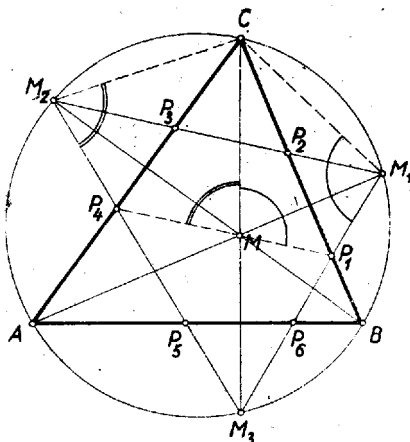
A P_2 -nél lévő egyíves szögek a tükrözés miatt egyenlők. Ennek a szögnek pótló szöge az M_1 -nél fekvő kétíves szög, amely, mint kerületi szög, egyenlő a B -nél fekvő kétíves szöggel, ez viszont mint merőlegesszárú szög, egyenlő a C -nél fekvő kétíves szöggel. Ez utóbbi pótlószöge az A -nál fekvő egyíves szögnek. Tehát négyszögünk $P_2 \sphericalangle$ -e egyenlő az $ABC_\Delta A \sphericalangle$ -ével. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy négyszögünk $P_5 \sphericalangle$ -e (az ábrán egyszer áthúzott ívvel jelölve) egyenlő az $ABC_\Delta C \sphericalangle$ -ével. Tehát négyszögünkben $B \sphericalangle + P_2 \sphericalangle + P_5 \sphericalangle = B \sphericalangle + A \sphericalangle + C \sphericalangle = 180^\circ$, és így a negyedik szög: $M \sphericalangle = 180^\circ$. (Bártfai Pál megoldása.)

VIII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúspontjával (5. ábra).



Az A -nál fekvő egyíves, ill. kétíves szög a VI. megoldás alapján egyenlő az M -nél fekvő hasonló jelzésű szögekkel. E két szög összege az A -nál fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, amely mint merőleges szárú szög, egyenlő az M -nél fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szöggel, amiből következik, hogy a P_3MC egyenlő az egyíves szöggel, vagyis $P_3MC \sphericalangle$ és $P_6MM_3 \sphericalangle$ csúcsszögek. Tehát a P_3P_6 átló átmegy az M ponton.

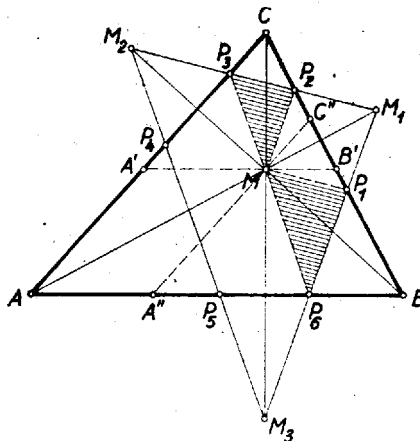
IX. megoldás: Kössük össze az M -et a hatszög P_1 és P_4 csúcpontjával, továbbá C -t M_1 és M_2 -vel (6. ábra).



Az M_1 -nél lévő egyíves szög a tükrözés folytán egyenlő az M -nél lévő egyíves szöggel. Ugyanígy egyenlők az M_2 és M -nél lévő kétíves szögek. De az $M_1C M_2M_3$ hűrnégyszögben a $M_1\angle + M_2\angle = 180^\circ$, tehát a $P_1MP_4\angle = 180^\circ$. (Reichlin-M. Viktor megoldása.)

Az állítás következő, igen szellemes, csupán a talpponti háromszög tulajdonságain alapuló bizonyítást adta Vigassy József, a verseny győztese.

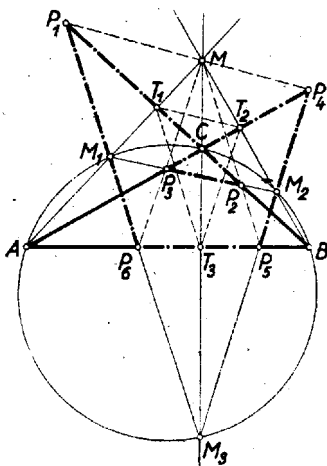
X. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög $P_3P_2P_1$ és P_6 csúcsaival, továbbá húzzuk meg az ABC_Δ -ben az M -en át az AB -vel párhuzamos $A'B'$ és az AC -vel párhuzamos $A''C''$ szakaszt (7. ábra).



7. ábra

A keletkezett $A'B'C$ és $A''BC''$ háromszögek hasonlóak és hasonló fekvésűek. A tükrözés folytán az MP_3P_2 , ill. P_6MP_1 -ek a fenti két háromszögbe írt minimális kerületű háromszögek (Gallai Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 332–334. old.), vagyis a talpponti háromszögek, melyek tehát egymásközt szintén hasonlóak és hasonló fekvésűek. Tehát $MP_3 \parallel P_6M_1$, mint megfelelő oldalak. E két párhuzamos szakasznak M végpontja közös, ennél fogva a P_6 , M és P_3 pontok egy egyenesbe esnek.

Megjegyzés: Tételünk tompaszögű háromszögre is általánosítható, de akkor a megfelelő $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ pontok hurkolt hatszögre vezetnek, melynek kétszeres pontja (hurokpontja) mindenkor a tompaszög csúcspontja. A szemközt fekvő csúcspontok most is a P_1 és P_4 , P_2 és P_5 , P_3 és P_6 csúcspontok (8. ábra).



8. ábra

A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a hegyesszögű háromszög esetén, csak hogy most a tompaszöget bezáró oldalakhoz tartozó magasságok (melyeknek talppontjai az oldalak meghosszabbítására esnek) a talpponti háromszög külső szögét felezik, vagyis a tompaszöget bezáró oldalak felezik a talpponti háromszög megfelelő szögeit. Az M hasonlósági centrum e szerepét most is megtartja.