

I. megoldás: Legyen a szétosztandó diók száma d , ekkor az első tanuló

$$a + \frac{d-a}{30} = \frac{d}{30} + \frac{29}{30}a$$

diót kap, a másodiknak jutó diók mennyisége pedig

$$2a + \frac{d - \frac{d}{30} - \frac{29}{30}a - 2a}{30} = \frac{29}{30^2}d + \left(2\frac{29}{30} - \frac{29}{30^2}\right)a = \frac{29}{30^2}d + \frac{29 \cdot 59}{30^2}a.$$

Ha tehát az első két tanuló ugyanannyi diót kapott, akkor

$$\frac{d}{30} + \frac{29}{30}a = \frac{29}{30^2}d + \frac{29 \cdot 59}{30^2}a, \quad \text{azaz} \quad \frac{d}{30^2} = \frac{29^2}{30^2}a, \quad d = 29^2a,$$

és az első két tanuló egyenként

$$a + \frac{d-a}{30} = a + \frac{(29^2-1)a}{30} = a + \frac{28 \cdot 30}{30}a = 29a$$

diót kapott. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a többinek is ugyanannyi dió jut. Legyen $k > 2$ és tegyük fel, hogy már az első $k-1$ tanulóról beláttuk, hogy nekik egyenként $29a$ dió jutott. Ekkor maradt meg $d - (k-1)29a = 29(30-k)a$ dió, így a k -adik tanulóknak

$$ka + \frac{29(30-k)a - ka}{30} = \frac{30ka + 29 \cdot 30a - 29ka - ka}{30} = 29a$$

dió jut. Így valóban sorban minden diák $29a$ diót kap. Ennek folytán $29a^2$ számú dióból 29 diáknak tudunk adni, tehát 29-en vannak az osztályban.

Megjegyzés: Szó szerint ugyanilyen megfontolással látható, hogy ha nem 30-ad részét, hanem tetszőesszerű b -ed részét ($b > 1$) vesszük mindig a maradéknak, akkor $d^2 = (b-1)^2a$ számú diónak kell kezdetben lennie ahhoz, hogy az első és a második diáknak ugyanannyi dió jusson, ekkor mindegyiküknek, és velük együtt a további diákoknak is $(b-1)a$ dió jut, egészen a $(b-1)$ -edikig, aki megkapja az összes még meglévő diót. A feladat további általánosítása lesz leolvasható a következő megoldásból.

II. megoldás: Legyen a kiosztandó diók száma d , kapjon a k -adik tanuló ka diót és még a maradék b -ed részét, a k -adik tanulóknak jusson ilyen módon c^k dió és legyen a visszamaradó diók száma d_k , jelentse d_0 a d -t. Ekkor

$$(1) \quad d_{k-1} = c_k + d_k \quad k = 1, 2, \dots$$

és

$$c_1 = a + \frac{d-a}{b} = \frac{b}{d} + \frac{b-1}{b}a, \quad c_2 = 2a + \frac{d_1-2a}{b} = \frac{d_1}{b} - 2\frac{b-1}{b}a,$$

általában

$$(2) \quad c_k = ka + \frac{d_{k-1} - ka}{b} = \frac{d_{k-1}}{b} + k\frac{b-1}{b}a \quad k = 1, 2, \dots$$

Vizsgáljuk két egymásutáni tanulóknak jutó mennyiség különbségét, használjuk rá a $D_k = c_{k+1} - c_k$ jelölést:

$$D_k = \frac{d_k - d_{k-1}}{b} + \frac{b-1}{b}a = \frac{b-1}{b}a - \frac{c_k}{b}$$

(1) szerint, s így két szomszédos különbség különbségében már a nem fog szerepelni:

$$D_{k+1} - D_k = -\frac{c_{k+1} - c_k}{b} = -\frac{D_k}{b}, \quad \text{azaz} \quad D_{k+1} = \frac{b-1}{b}D_k.$$

Azt nyertük tehát, hogy a D_k különbségek mértani sorozatot alkotnak. Ennek hányadosa $\frac{b-1}{b} > 0$, mert $b > 1$. Eszerint az egymásutáni diákoknak jutó diómenyiség vagy állandóan csökken, vagy állandóan növekszik, vagy mindannyian egyenlő számú diót kapnak.

A feladat állítása tehát így általánosítható: ha van két diák, akik egyenlő mennyiségű diót kaptak, akkor mindenkinek ugyanannyi dió jutott.

Hogy a három eshetőség közül melyik következik be, az D_1 előjelétől, illetve 0 voltától függ. Mivel

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{b-1}{b}a - \frac{c_1}{b} = \frac{(b-1)b}{b^2}a - \frac{d}{b^2} - \frac{b-1}{b^2}a = \frac{(b-1)^2}{b^2}a - \frac{d}{b^2} = \\ &= \frac{(b-1)^2a - d}{b^2} \end{aligned}$$

tehát az egymásutáni diómennyiségek aszerint nőnek, csökkennek, vagy lesznek egyenlők, amint

$$d < (b-1)^2 a, \quad \text{vagy} \quad d > (b-1)^2 a, \quad \text{vagy} \quad d = (b-1)^2 a.$$

A k -adik tanulónak

$$\begin{aligned} c_k &= c_1 + D_1 + D_2 + \dots + D_{k-1} = \\ &= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + D_1 \left[1 + \frac{b-1}{b} + \dots + \left(\frac{b-1}{b} \right)^{k-2} \right] = \\ &= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + \frac{(b-1)^2 a - d}{b^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b-1}{b} \right)^{k-1}}{\frac{1}{b}} = \\ &= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b}a + \frac{(b-1)^2 a - d}{b} - \frac{(b-1)^2 a - d}{b} \cdot \left(\frac{b-1}{b} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{b-1+b^2-2b+1}{b}a - \frac{(b-1)^2 a - d}{b} \left(\frac{b-1}{b} \right)^k \frac{b}{b-1} = \\ &= (b-1)a - \frac{(b-1)^2 a - d}{b-1} \cdot \left(\frac{b-1}{b} \right)^k. \end{aligned}$$

dió jut az általános esetben egészen azon n -edik tanulóig, akinek a részét kiadva már $(n+1)a$ diónál kevesebb marad vissza. Ennek feltételéül az általános esetben meglehetősen áttekinthetetlen egyenlőtlenség adódik.