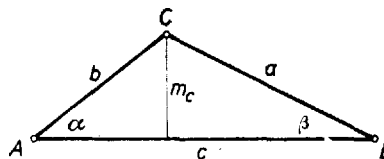


A megoldás lényege annak észrevétele volt, hogy a feltételi egyenletből következik, hogy a γ szög értéke 120° . Ehhez lényegében két úton juthatunk: vagy a szögeket külsőbőljük ki távolságok segítségével és azután felhasználjuk a háromszög alkotórészei közötti összefüggéseket, vagy az adott összefüggést goniometriaival összefüggéssé igyekszünk alakítani és goniometriaival átalakításokat végzünk. Az előbbi út pl. a következő módon követhető.



I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja. Helyettesítsük be az adott összefüggésbe a $\sin \alpha = \frac{m_c}{b}$, $\sin \beta = \frac{m_c}{a}$, $2t = cm_c$ kifejezéseket és emeljünk négyzetre. Mivel mindkét oldalon pozitív mennyiség áll, az eredetivel ekvivalens összefüggéshez jutunk

$$c^2 m_c^2 = a^2 b^2 \left(\frac{m_c^2}{a^2} + \frac{m_c^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{ab} \right) = (a^2 + b^2 + ab) m_c^2.$$

Innen, mivel m_c nem lehet 0 ($\alpha = 43^\circ$ folytán a háromszög nem lapulhat egyenes szakasszá),

$$(1) \quad c^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

Másrészt a cosinus-tétel szerint

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

A két kifejezést összehasonlítva $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$, tehát $\gamma < 180^\circ$ miatt $\gamma = 120^\circ$ lehet csak és ebben az esetben (1), s így az eredeti összefüggés is valóban teljesül. Ez esetben $\alpha + \beta = 60^\circ$, tehát a háromszög szögei $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 17^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

II. megoldás: Felhasználva a terület meghatározására szolgáló $2t = ab \sin \gamma$ összefüggést, a 0-tól különböző ab -értékkel osztva és négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$(2) \quad \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

vagy

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + \sin \alpha \sin \beta = 0.$$

Alakítsuk át először a középső különbséget, szögfüggvények összegének és különbségének szorzatalakját használva [ehelyett a $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$ kifejezés tagokra bontásával is célhoz érhetnénk]

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma &= (\sin \beta + \sin \gamma)(\sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \\ &= \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) = \sin \alpha \sin(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + \sin \alpha \sin \beta &= \sin \alpha [\sin \alpha + \sin(\beta - \gamma)] + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 2 \sin \alpha \sin \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} \cos \frac{180^\circ - 2\beta}{2} + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 2 \sin \alpha \sin(90^\circ - \gamma) \cdot \cos(90^\circ - \beta) + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta = 2 \sin \alpha \sin \beta \left(\cos \gamma + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

E szorzat csak úgy lehet 0, ha $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$, azaz $\gamma = 120^\circ$.

Megjegyzések: 1. A II. megoldásban a lapunk 560. feladatában (VIII. köt. 82. old.) szereplő

$$(3) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \text{ ha } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

azonosságot bizonyítottuk be és alkalmaztuk. Többen fel is használták készen ezt az azonosságot a megoldáshoz.

2. Néhányan a (2) összefüggésből jutottak (1)-hez, felhasználva a sinustételt az $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \lambda$ alakban, vagy pontosabban az $a = 2r \sin \alpha$ stb. összefüggéseket, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. Ugyanezen az úton a cosinus-tétel is goniometriaival összefüggéssé alakítható, éppen a (3) azonossággá, és (2)-vel összehasonlítva adja a kívánt eredményt.