

I. megoldás. Válasszuk a parabola tengelyét x -tengelynek, csúcserintőt y -tengelynek, ekkor a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

Legyen a parabola x_1, y_1 pontja az érintési pont, akkor az érintő egyenlete

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

ahol

$$y_1^2 = 2px_1,$$

azaz

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}.$$

Így az érintési pontban emelt merőleges, ill. az $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ fókuszából az érintővel párhuzamosan húzott egyenes egyenlete

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} \left(x - \frac{y_1^2}{2p} \right)$$

azaz

$$2py_1x + 2p^2y = y_1(y_1^2 + 2p^2)$$

illetve

$$y = \frac{p}{y_1} \left(x - \frac{p}{2} \right),$$

azaz

$$2px - 2y_1y = p^2.$$

Innen kiküszöbölve y -t, ill. x -et

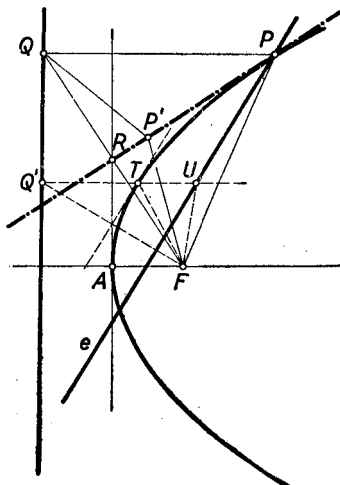
$$2p(y_1^2 + p^2)x = y_1^4 + 2p^2y_1^2 + p^4 = (y_1^2 + p^2)^2; \quad 2(p^2 + y_1^2)y = y_1(y_1^2 + p^2).$$

Oszthatunk $p^2 + y_1^2$ -tel, mert ez nem lehet 0 és y_1 -et kiküszöbölve kapjuk, hogy $2y = y_1$; $2px = y_1^2 + p^2 = 4y^2 + p^2$, azaz $y^2 = \frac{p}{2} \left(x - \frac{p}{2} \right)$; ez pedig olyan parabola egyenlete, melynek csúcspontja $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, az eredeti parabola fókusza, paramétere pedig az eredeti parabola paraméterének negyedrésze.

*

A feladat megoldható koordináták és (ami lényegében ugyanazt jelentené) Pythagoras tételének felhasználása nélkül is. Ekkor a következő összefüggésekre lesz szükségünk: a parabola tetszés szerinti P pontjának a vetülete a direktrixen legyen Q , ekkor a P pontban húzott érintő az FPQ -szögfelezője, vagy ami ezzel egyenértékű, a parabola fókuszából az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak mértani helye, a parabola csúcserintője.

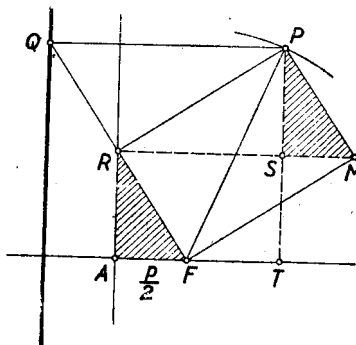
Valóban meghúzva az FPQ -szögfelezőjét (mely merőlegesen metszi QF -et a csúcserintőre eső R felezőpontban), erre $FP = PQ$, de az egyenes bármely más P' pontjára $FP' = P'Q$, az utóbbi távolság pedig nagyobb P' -nek a direktrixtől mért távolságánál (6. ábra).



6. ábra

Így az egyenesnek minden P -től különböző pontja a direktrixhez közelebb van, mint a fókuszhoz, tehát a parabola ugyanazon oldalára esik. Könnyen látható az is, hogy minden más P -n átmenő egyenesnek van pontja a parabolának mindkét oldalán². Így valóban e szögfelező a parabola érintője. Az ábra alapján fordítva is könnyű a csúcserintő bármely R pontjához megkeresni azt a P pontot a parabolán, melyben húzott érintőre F -ből merőlegest bocsátva annak talppontja, éppen R lesz.

II. megoldás: Legyen P -ből a direktrixre bocsátott merőleges talppontja Q , FQ felezőpontja R , az érintőre P -ben bocsátott merőleges és az F -ből az érintővel húzott párhuzamos metszéspontja M (7. ábra).



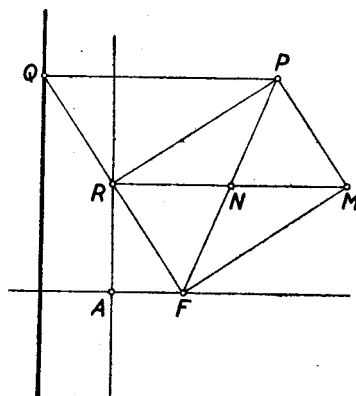
7. ábra

A segédtétel szerint $FRP \angle = 90^\circ$, tehát az $FMPR$ négyszög téglalap, így $MP \perp FR$, de akkor egyszersmind $MR \parallel PQ$. Bocsássunk P -ből merőlegest a parabola tengelyére; messe ez MR -t, ill. a tengelyt az S , ill. T pontban.

Ekkor az oldalak párhuzamossága és $MP = FR$ miatt, $MPS \triangle \cong FRA \triangle$, s így $PS = RA = \frac{1}{2}PT$, $MS = FA = \frac{p}{2}$.

Az M pontok mértani helye tehát az adott parabolából a következő módon keletkezik: először minden pontnak a parabola tengelyétől való távolságát felére csökkentjük, azután az így keletkezett görbét $\frac{p}{2}$ távolsággal eltoljuk. Az utóbbi lépés a görbe alakját nem változtatja meg; az A pontot, mely az első lépésnél helyben marad, F -be viszi át. Az első lépésnél viszont a parabolából újabb parabola keletkezik, melynek a csúcsa és tengelye azonos az eredeti parabolával, paramétere pedig negyed-akkora. (L. jelen számunkban a 618. sz. feladatot.)

III. megoldás. Az $FMPR$ téglalap átlói egyenlők és felezik egymást, így RN , mint az $FPQ \triangle$ középvonala párhuzamos QP -vel, vagyis merőleges a csúcserintőre és $RN = NF$ (8. ábra), tehát az N pont olyan parabolát ír le, melynek az eredeti parabolával közös a fókusza, direktrixre pedig az eredeti parabola csúcserintője, tehát paramétere $\frac{p}{2}$.



8. ábra

Minden egyes N pontból úgy nyerjük a megfelelő M pontot, hogy a csúcserintőtől való távolságát kétszeresre nyújtjuk. Ezzel ismét parabolát nyerünk, amelynek újra feleződik a paramétere, csúcsa pedig F -be kerül.

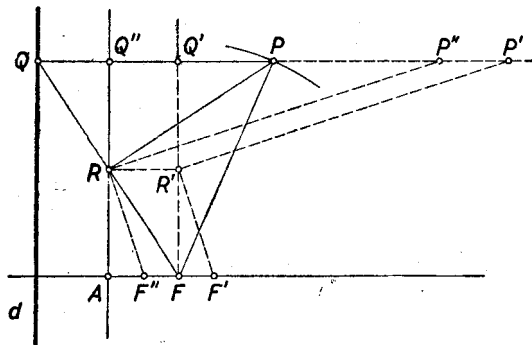
²Legyen e egy PR -től különböző egyenes P -n át. Ennek azon félegyenesének pontjai mely P -ből indulva a direktrix és PR közti hegyes szögtérbe lép, könnyen láthatóan a fókuszról vannak távolabb, mint a direktrixtől, viszont messe az F -ből e -re bocsátott merőleges a direktrixet Q' -ben. Emeljünk Q' -ben a direktrixre merőlegest, messe ez FQ' felezőmerőlegesét, illetőleg e -t a T , ill. U pontban, akkor belátható, hogy $T'Q'$ és U közt van $FT = TQ'$ s így $FU < FT + TU = Q'T + TU - Q'U$, vagyis U a fókuszhoz van közelebb, mint a direktrixhez, tehát e átmetszi a parabolát.

³Úgy is látható ez, hogy az S pontok az eredeti parabolának az F pontból felére kicsinyített képét alkotják.

Megjegyzés: Felhasználtuk, hogy ha egy parabolát a direktrixtől egy irányban kétszeresen megnyújtunk, vagy ha ugyancsak egy irányban a tengelye felé 1/2 arányban összehúzzuk, akkor ismét parabolát kapunk, mindkét esetben kisebb paraméterrel: előbbi esetben az eredeti paraméter fele, utóbbi esetben a negyede lesz az új paraméter. Ez azonban semmiképp sem magától értendő, még csak az összes parabola hasonlóságából sem következik. Legkönnyebb koordináták segítségével belátni. (Mellesleg az első megoldásban M koordinátáira adódó $x = \frac{1}{2p}(y_1^2 + p^2) = x_1 + \frac{p}{2}$,

$y = \frac{y_1}{2}$ is éppen a II. megoldásban elemien bizonyított összefüggéseket fejezi ki.) A II. és III. megoldásban viszont éppen a koordinátákat akartuk elkerülni, tehát csak akkor mondhatjuk, hogy ez sikerült, ha a fentebb említett tényeket is koordináták és Pythagoras tételének felhasználása nélkül tudjuk bizonyítani. Ez sem ütközik nehézségbe. A III. megoldásra vonatkozóan megmutatjuk, a II. megoldással kapcsolatos bizonyítást ennek alapján az olvasóra bízuk (l. a 618. feladatot).

Legyen d , A és F egy parabola direktrixe, csúcsa és fókusza; P egy pontja, Q annak vetülete d -n és legyen $QP' = 2QP$ (9. ábra).



9. ábra

Segédételünk értelmében QF szakasz R felezőpontjára $PRF \sphericalangle = 90^\circ$ és R természetesen a csúcserintőn van. Ha P' valóban parabolát ír le, akkor ennek csúcsa az F pont kell, hogy legyen. Az ebben d -vel párhuzamosan húzott egyenes messe a PQ egyenest Q' -ben, felezőpontja legyen R' . Ismét segédételünk értelmében elegendő azt megmutatni, hogy az R' -ben $P'R'$ -re bocsátott merőleges egy P' pont helyzetétől független F' pontban metszi az AF tengelyt.

Toljuk el $R'P'$ -t önmagával párhuzamosan úgy, hogy $R'R$ -be kerüljön. Ugyanez az eltolás vigye F' -t, P' -t, ill. Q' -t, F'' , P'' Q'' -be. Mivel $F'F'' = RR' = \frac{p}{2}$, független a P' pont helyzetétől, így elegendő azt megmutatni, hogy F'' helyzete is független. Tudjuk, hogy

$$QQ'' = RR' = P'P', \quad \text{amiből} \quad Q''P'' = 2Q''P.$$

Mivel

$$PRF \sphericalangle = P''RF'' \sphericalangle = 90^\circ,$$

így

$$PQ''R_\Delta \sim RAF_\Delta \quad \text{és} \quad P''Q''R_\Delta \sim RAF''_\Delta,$$

mert megfelelő oldalai páronként merőlegesek. Így

$$\frac{1}{2} = \frac{PQ''}{P''Q''} = \frac{PQ''}{Q''R} \cdot \frac{Q''R}{Q''P''} = \frac{RA}{AF} \cdot \frac{AF''}{RA} = \frac{AF''}{AF},$$

azaz

$$AF'' = \frac{1}{2}AF;$$

tehát AF'' és így a vele egyenlő FF' is független a P' ponttól és fele az eredeti parabola megfelelő adatának. P' tehát parabolát ír le, melynek paramétere feleakkora, mint az eredeti paraboláé, és ez volt a bizonyítandó.