

I. megoldás: Azon x értékek jönnek csak számításba, amelyekre

$$1 - \sin 2x \neq 0, \quad \text{vagyis} \quad x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x + \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x) - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,$$

vagyis

$$\sin x + \cos x - 2 \sin^2 x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$\sin^2 x$ helyett mindenütt $1 - \cos^2 x$ -et írva és rendezve

$$\sin x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$$

A páratlan fokú tagokból $\sin x$ -et, ill. $\cos x$ -et kiemelve

$$\sin x(1 - 2 \cos^2 x) + \cos x(2 \cos^2 x - 1) - 2 \cos^2 x + 1 = 0$$

A baloldalon kiemelhető $2 \cos^2 x - 1$:

$$(2 \cos^2 x - 1)(\cos x - \sin x - 1) = 0.$$

Innen vagy

$$(1) \quad 2 \cos^2 x - 1 = 0,$$

vagy

$$(2) \quad \cos x - \sin x - 1 = 0.$$

(1)-ből

$$(3) \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vagy

$$(4) \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2)-ből

$$\cos x = 1 + \sin x$$

vagyis

$$\cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x,$$

amiből ($\cos^2 x$ helyébe $1 - \sin^2 x$ -et írva és rendezve)

$$(5) \quad 2 \sin^2 x + 2 \sin x = 2 \sin x(\sin x + 1) = 0$$

Egyelőre csak a főértékekre szorítkozva

(3)-ból

$$(6) \quad x = \frac{\pi}{4},$$

$$(7) \quad x = \frac{7\pi}{4},$$

(4)-ből

$$(8) \quad x = \frac{3\pi}{4},$$

$$(9) \quad x = \frac{5\pi}{4},$$

(5)-ből

$$(10) \quad x = 0,$$

$$(11) \quad x = \pi,$$

$$(12) \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Mivel nem mindig hajtottunk végre egyenértékű (ekvivalens) átalakításokat (pl. négyzetre emeltünk), azért meg kell vizsgálnunk, vajon a nyert gyökök kielégítik-e *eredeti* egyenletünket.

A (6) és (9) alatti gyökök éppen a kizárt értékek. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a (11) alatti gyök nem tesz eleget egyenletünknek, amíg a többi 4 gyök tényleg kielégíti egyenletünket.

Tehát a keresett gyökök főértékei ($0 \leq x < 2\pi$) nagyságrendben:

$$x_1 = 0 = 0^\circ, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ, \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ, \quad x_4 = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ.$$

Természetesen e főértékekhez $2\pi = 360^\circ$ többszöröseit hozzáadva vagy kivonva, ugyancsak gyököket nyerünk. Tehát az összes gyökök (x_2 és x_4 et egy képletbe összefoglalva):

$$x = \pm 2k\pi = \pm k \cdot 360^\circ, \quad x = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi = 135^\circ \pm k \cdot 180^\circ, \\ x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi = 270^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots$$

II. megoldás: Azok az x -ek jönnek csak tekintetbe, melyekre

$$(1) \quad 1 - \sin 2x \neq 0.$$

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre, ekkor

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

folytán az egyenletben csak $2x$ szögfüggvényei fognak szerepelni. Az egyenletet 0-ra redukálva és alkalmasan átalakítva:

$$(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x)^2 - \cos^2 2x = (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - \cos^2 2x = \\ = (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - (1 - \sin^2 2x) = -\sin 2x(1 - \sin^2 2x) = \\ (2) \quad = -\sin 2x(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x) = 0$$

Itt (1) szerint az utolsó tényező nem lehet 0, tehát csak a

$$\sin 2x = 0 \quad \text{és} \quad \sin 2x = -1$$

egyenletek megoldásai jönnek számításba.

A $0 \leq x < 2\pi$ közben előbbi az $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ értékekre, utóbbi pedig az $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ értékekre teljesül. Ezek közül az eredeti egyenletnek csak

$$x = 0, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

értékek gyökei és természetesen minden olyan x érték, amely ezek valamelyikétől $\pm 2k\pi$ -vel különbözik, ahol $k = 1, 2, \dots$

III. megoldás: Az átalakításokat kissé ügyesebben is végezhetjük: ha

$$\cos x \neq \sin x, \text{ azaz } \operatorname{tg} x \neq 1, \quad x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

akkor

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$

tehát vagy

$$(1) \quad \sin x + \cos x = 0$$

vagy

$$(2) \quad \cos x - \sin x - 1 = 0$$

(1)-ből, mivel $\cos x$ és $\sin x$ nem tűnhet el egyszerre, s így az egyenlet megoldásaira egyik tag sem 0,

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(2)-ből

$$1 - \cos x = -\sin x, \quad 2 \sin^2 \frac{x}{2} = -2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$
$$2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Itt vagy

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

azaz

$$x = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

vagy pedig

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1, \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

azaz

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A nyert értékek megoldást szolgáltatnak, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

IV. megoldás: Induljunk ki a III. megoldásban nyert

$$\sin x + \cos x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

alakból.

Itt

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right),$$

és

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)},$$

tehát az egyenlet

$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}.$$

Írjunk $\frac{\pi}{4} + x = y$ -t, ekkor (mivel feltételeztük, hogy $x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi$)

$$y \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{azaz} \quad \cos y \neq 0,$$

és az egyenlet így alakul

$$\sin y \left(\sqrt{2} \cos y - 1 \right) = 0,$$

tehát vagy

$$\sin y = 0, \quad \text{vagy} \quad \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az elsőből

$$y = \pm k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

a másodikból

$$y = \pm \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

azaz

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi, \quad \text{vagy} \quad x = \pm 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi,$$

ahol $k = 0, 1, 2, \dots$

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, így mindezen értékek gyököket szolgáltatnak.