

I. megoldás: Az első egyenletből

$$y(x+1) + x + 5 = 0.$$

Itt x nem lehet -1 , így y -t kifejezhetjük:

$$y = -\frac{x+5}{x+1}.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve az

$$x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 37x - 6 = 0$$

egyenlethez jutunk. Vizsgáljuk meg, hogy van-e ennek racionális gyöke. Tudjuk, hogy ha van ilyen megoldás, akkor annak számlálója az állandó tagnak, -6 -nak, nevezője pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának, tehát esetünkben 1 -nek osztója. Így csak az $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ és ± 6 értékek jöhetnek számításba. Kipróbálva azt találjuk, hogy -2 és 3 valóban gyök is. Így az egyenlet baloldalából kiemelhetőnek kell lennie az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzatának, az

$$(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

polinomnak és valóban negyedfokú egyenletünk baloldala így írható:

$$(x^2 - x - 6)(x^2 + 6x + 1).$$

Így a már megtalált gyökökön kívül gyökei még az egyenletnek az

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

egyenlet gyökei. Az összes gyökök tehát

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3 + 2\sqrt{2}, \quad x_4 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

és a megfelelő y -értékek:

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -3 - 2\sqrt{2}, \quad y_4 = -3 + 2\sqrt{2}.$$

**Kimutatás az 1953. évi Rákosi Mátyás matematikai verseny I. fordulójáról
megyék és iskolafajok szerint**

Megyék és Budapest	Beadott dolgozatok			Döntőbe került		
	Gimnázium	Ip. techn.	Összesen	Gimnázium	Ip. Techn.	Összesen
1. Baranya	93	39	132	7	–	7
2. Bács-Kiskún	91	4	95	4	–	4
3. Békés	147	19	166	10	2	12
4. Borsód	142	42	184	4	4	8
5. Csongrád	94	61	155	8	4	12
6. Fejér	27	13	40	2	–	2
7. Győr-Sopron	107	19	126	18	–	18
8. Hajdu-Bihar	100	25	125	4	1	5
9. Heves	29	10	39	4	–	4
10. Komárom	100	26	126	9	–	9
11. Nógrád	25	12	37	3	–	3
12. Pest	68	2	70	3	–	3
13. Somogy	23	6	29	4	–	4
14. Szabolcs-Szatmár	68	16	84	2	–	2
15. Szolnok	106	5	111	5	1	6
16. Tolna	83	–	83	–	–	–
17. Vas	118	3	121	2	–	2
18. Veszprém	100	5	105	9	–	9
19. Zala	28	6	34	3	–	3
20. Budapest	1011	70	1081	64	12	76
Összesen	2560	383	2943	165	24	189

II. megoldás: A második egyenlet így írható

$$xy(x + y) + 6 = 0$$

és vegyük észre, hogy az $u = x + y$ és $v = xy$ kifejezések összege és szorzata van megadva:

$$u + v = -5, \quad uv = -6.$$

u és v tehát a

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

egyenlet két gyöke, vagyis

$$u_1 = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad v_1 = \frac{-5-7}{2} = -6,$$

vagy fordítva

$$u_2 = -6, \quad v_2 = 1.$$

Mivel ezek jelentése $x + y$, ill. xy , tehát x és y a

$$z^2 - z - 6 = 0$$

és a

$$z^2 + 6z + 1 = 0$$

egyenlet két gyöke lehet. Az első egyenletből

$$x_1 = 3, \quad y_1 = -2; \quad x_2 = -2, \quad y_2 = 3.$$

A második egyenletből

$$\begin{aligned} x_3 &= -3 + 2\sqrt{2}, & y_3 &= -3 - 2\sqrt{2}; \\ x_4 &= -3 - 2\sqrt{2}, & y_4 &= -3 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$