

I. megoldás: Bebizonyítandó tételünk így is írható:

$$3 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) + \frac{a}{b-c} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} \right) + \frac{b}{c-a} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right) = 9,$$

vagyis

$$\begin{aligned} & \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{bc} + \\ & + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a^2 - ab + bc - c^2}{ac} = \frac{c}{a-b} \cdot \frac{-(a+b)(a-b) + c(a-b)}{ab} + \\ & + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{-(b+c)(b-c) + a(b-c)}{bc} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{-(c+a)(c-a) + b(c-a)}{ac} = \\ & = \frac{c[-(a+b)+c]}{ab} + \frac{a[-(b+c)+a]}{bc} + \frac{b[-(c+a)+b]}{ac} = 6 \end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint $-(a+b) = c$, $-(b+c) = a$ és $-(c+a) = b$, azért

$$\frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 2 \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 6,$$

vagyis

$$(1) \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 3.$$

Ennek helyességét kell tehát bizonyítanunk. Feltételünk szerint $c = -(a+b)$, és így

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} &= -\frac{a^3 + b^3 - (a+b)^3}{ab(a+b)} = -\frac{a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3}{ab(a+b)} = \\ &= \frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)} = 3. \end{aligned}$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Jegyzet: Az adott feltételek mellett az (1) alatti azonosság még így is bizonyítható:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 = 0, \text{ és mivel } a+b = \\ &= -c, \text{ azért} \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3c^3 - 3c^2 = 0,$$

amiből

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

II. megoldás: Az a , b , c , számok mind különbözők és egyike sem lehet 0, mert különben az adott szorzat értelmetlen.

Jelöljük a szorzat első tényezőjét A -val, második tényezőjét B -vel.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-b)ab + (b-c)bc + (c-a)ac}{abc} = \\ &= \frac{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)}{abc} = \\ &= \frac{(b-c)[a^2 - a(b+c) + bc]}{abc} = \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{c(b-c)(c-a) + a(a-b)(c-a) + b(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= -\frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

Tehát

$$AB = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc}{abc}.$$

Adjuk hozzá a számlálóhoz az $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$ kifejezést, amely a feltételünk szerint 0-val egyenlő.

$$\begin{aligned} AB &= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 9abc}{abc} = \\ &= \frac{2[a^2(a + b + c) + b^2(a + b + c) + c^2(a + b + c)] + 9abc}{abc} \end{aligned}$$

Mivel tételünk szerint a számláló első tagja 0, azért

$$AB = \frac{9abc}{abc} = 9, \text{ ami bizonyítandó volt.}$$

Így végezte el a bizonyítást *Szekerka Pál* (Bp. VI. Kölcsey g. IV. o. t.)

Sok pályázó hivatkozott arra, hogy egy azám és reciprokának összege ≥ 2 , megfelelően arról, hogy ez csak *pozitív* számokra érvényes.