

Bizonyításunkban minden egyenlőtlenség a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenségből következik.

1984-09-258-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán látható jelölésekkel a négyszög területe

$$1 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha + \frac{1}{2} cd \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \beta + \frac{1}{2} da \sin \delta.$$

Így

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{ab \sin \alpha + cd \sin \gamma + bc \sin \beta + da \sin \delta}{4} \geq \\ &\geq \sqrt[4]{a^2 b^2 c^2 d^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta} = \\ &= \sqrt[4]{(a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)^2 (c_1 + c_2)^2 (d_1 + d_2)^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta} \geq \\ &\geq \sqrt[4]{4a_1 a_2 \cdot 4b_1 b_2 \cdot 4c_1 c_2 \cdot 4d_1 d_2 \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta} = \\ &= 8 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} a_2 b_1 \sin \alpha\right) \left(\frac{1}{2} b_2 c_1 \sin \beta\right) \left(\frac{1}{2} c_2 d_1 \sin \gamma\right) \left(\frac{1}{2} d_2 a_1 \sin \delta\right)}. \end{aligned}$$

1984-09-258-2.eps

2. ábra

A 2. ábra szerint a gyökjel alatt álló tényezők mindegyike a levágott kis háromszögek közös T területével egyenlő, tehát $1 \geq 8T$, azaz $4T \leq 1/2$. Ebből a feladat állítása azonnal adódik.

Megjegyzés. Az egyenlőség a megoldás szerint csak $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ és $d_1 = d_2$ esetben állhat fenn. Ekkor viszont, mivel a csúcsoknál keletkező háromszögek egyenlő területűek, magasságaik is egyenlők. A négy négyszög szemközti oldalfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a másik két oldaltól, tehát a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak. Megfordítva, egységnyi területű paralelogramma oldalfelező pontjai által meghatározott négyszög területe $1/2$, egyenlőség csak ebben az esetben áll.