

Válasszuk 2 szomszédos emelet távolságát (4 m) egységnek. Ha az emeleteket $x_1, \dots, x_9$ sorrendben járom végig, akkor

$$|x_1 - 0| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_9 - x_8| + |0 - x_9|$$

egységnyi távolságot teszek meg. A feladat feltételei mellett az 1, 2, ... 9 számok minden lehetséges sorrendje (permutációja) pontosan ugyanolyan valószínű. Az összes lehetséges sorrendek száma $9!$, egy sorrend valószínűsége tehát $1/9!$. A várható értéket úgy kapom, hogy az

$$\frac{1}{9!}(|x_1 - 0| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_9 - x_8| + |0 - x_9|)$$

kifejezéseket összeadom az 1, 2, ... 9 számok minden lehetséges $x_1, \dots, x_9$ permutációjára.

Nézzük, hányszor szerepel a tagok között az $|1 - 0|$ összeadandó. Nyilván annyiszor, ahány permutáció 1-essel kezdődik, vagyis $8!$ -szor. Ugyanez igaz a $|2 - 0|$, $|3 - 0|$, ... $|0 - 9|$ összeadandókra is.

A $|2 - 1|$ összeadandó annyiszor lép föl, ahány permutációban a 2-es után 1-es következik. Ilyen permutáció pedig, mint arról könnyen meggyőződhetünk, szintén $8!$ van. Ugyanez igaz bármely j és k párra: $8!$ olyan permutáció van, amelyben a k után közvetlenül a j következik, a $|k - j|$ összeadandó is $8!$ esetben lép föl.

Végül $8!$ olyan permutáció van, amely éppen 1-re végződik, vagyis a $|0 - 1|$ összeadandó is $8!$ -szor szerepel, s ugyanez igaz a $|0 - 2|$, $|0 - 3|$, ... $|0 - 9|$ tagokra. A várható értéket tehát úgy kaphatjuk meg, hogy minden 0 és 9 közötti $k \neq j$ párra képezzük a $|k - j|$ kifejezést, az így kapott 90 számot összeadjuk, megszorozzuk $8!$ -sal és elosztjuk $9!$ -sal, vagyis a várható érték:

$$\frac{8!}{9!} \sum_{0 \leq j \neq k \leq 9} |k - j| = \frac{1}{9} \cdot 330 = \frac{110}{3} \text{ egység, azaz } 440/3 \text{ m.}$$

Tigelmann Péter (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha minden barátomat (így a 9. emeleten lakót is) fel akarom keresni, legkevesebb 18 emeletnyit kell liftezniem. Ha taláломra választom a sorrendet, várhatóan $110/3 > 36$ emeletnyit kell megtennem, ami jóval több.

Ha nem 10, hanem n -szintes házban lagnék, a legjobb esetben egyesével végigmegyek az 1, 2, ... $(n - 1)$ emeleten, majd vissza a földszintre. Ez $2(n - 1)$ emeletnyi út. Ha viszont taláломra választom a sorrendet, a várható út $n(n + 1)/3$ emeletnyi. Ez pedig azt jelenti, hogy ha taláломra választom a sorrendet, várhatóan sokszor kell irányt változtatnom.

Tőrőcsik Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)