

Az első sorozat elemei legyenek rendre $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, a másodiké $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$. A feladat kikötései szerint $a_1 = 3, b_1 = 1$, továbbá

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a és b pozitívak, továbbá $a > b$, akkor

$$a > \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b} > b.$$

Így ha $a_{n-1} > b_{n-1}$ valamilyen $n \geq 2$ -re, akkor $a_{n-1} > a_n > b_n > b_{n-1}$ is igaz. Minthogy $a_1 = 3 > b_1 = 1$, ebből teljes indukcióval következik, hogy

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots > b_n > \dots > b_2 > b_1 = 1.$$

Az a_n sorozat tehát monoton csökken és alulról korlátos, a b_n sorozat monoton nő és felülről korlátos. Mindkettőnek van tehát határértéke. Belátjuk, hogy e két határérték azonos, ehhez elég megmutatni, hogy az $a_n - b_n$ különbség nullához tart.

Tudjuk, hogy $b_{n+1} > b_n$, tehát

$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} < a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{a_n - b_n}{2} < \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{4} < \dots < \frac{a_1 - b_1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az $a_n - b_n$ különbség tehát valóban tart 0-hoz, a két sorozat határértéke azonos.

Végül a képzési szabály alapján

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n,$$

vagyis a két sorozat azonos indexű tagjainak szorzata mindig $a_1 \cdot b_1 = 3$. A két sorozat határértéke ugyanaz az 1 és 3 közé eső szám, és a két sorozat azonos indexű tagjainak szorzata 3, tehát a sorozatok közös határértéke $\sqrt{3}$.

Megjegyzés. Ha az a_n sorozat első eleme 3 helyett tetszőleges $x > 0$ szám, akkor a két sorozat közös határértéke $\sqrt{x}$. A feladat tehát gyors módszert ad arra, hogyan lehet közelítőleg négyzetgyököt vonni, ha csak összeadni és reciprokot venni szabad.

Náray Miklós (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)