

Belátjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\pi}.$$

Először is egyszerűbb alakra hozzuk a_n -t. A $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ egyenlőségből következik, hogy

$$\sin \frac{i\pi}{n} = \sin \frac{(n-i)\pi}{n}.$$

Ezt felhasználva, (1) a következő alakba is írható:

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{(n-1)\pi}{n} + 2 \sin \frac{(n-2)\pi}{n} + 3 \sin \frac{(n-3)\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{\pi}{n} \right].$$

Ha a szögletes zárójelben a tagok sorrendjét megfordítjuk, majd (1)-et is (2)-t összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$2a_n = \frac{1}{n^2} \left[n \cdot \sin \frac{\pi}{n} + n \cdot \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + n \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right],$$

azaz

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{2n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezést többféleképpen is lehet explicit alakra hozni. A legegyszerűbb talán a következő: Szorozzuk meg az összeg minden tagját $2 \sin \frac{\pi}{2n}$ -nel! A $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$ összefüggést felhasználva

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} &= \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{3\pi}{2n}, \\ 2 \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} &= \cos \frac{3\pi}{2n} - \cos \frac{5\pi}{2n}, \\ 2 \sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} &= \cos \frac{5\pi}{2n} - \cos \frac{7\pi}{2n}, \\ &\vdots \\ 2 \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n} &= \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Az $n-1$ egyenlőséget összeadva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{2n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] &= \\ &= \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} = 2 \cos \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Innen a_n -re a következő zárt formulát kapjuk:

$$(4) \quad a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}.$$

Mármost a $b_n = \cos \frac{\pi}{2n}$ sorozatnak van határértéke, ha n tart végtelenhez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2n} = 1.$$

Másképp a $c_n = 2n \sin \frac{\pi}{2n}$ sorozatnak is van határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi$$

(Felhasználtuk, hogy $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, ha $x \rightarrow 0$.)

Így a két sorozat hányadossorozatának, a_n -nek is van határértéke, és ez a két sorozat határértékének hányadosa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = \frac{1}{\pi}.$$

Drávucz Katalin (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. $\frac{1}{a_n}$ értéke az egységsugarú kör köré rajzolt szabályos $2n$ -oldalú érintősokszög területével egyenlő. Ha ugyanis O a kör középpontja, P_1 és P_2 a szabályos érintő $2n$ -szög két szomszédos csúcsa, akkor a sokszög területe $2n$ -szerese az OP_1Q háromszög területének, ahol Q a P_1P_2 szakasz felezőpontja (érintési pontja). Másrészt a P_1Q szakasz hossza éppen $\text{tg } P_1OQ \triangleleft = \text{tg } \frac{\pi}{2n}$, tehát az érintő $2n$ -szög területe éppen $2n \text{tg } \frac{\pi}{2n}$, ami (4) szerint éppen $\frac{1}{a_n}$. Ebből következik, hogy az a_n sorozat monoton nő.

Drávucz Katalin

2. Írjuk a_n -et a következő alakba:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \\ + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} \sin \frac{n\pi}{n}.$$

(Az utolsó tagot szabad a_n -hez hozzáadni, mert értéke 0.) Ebből az alakból rögtön leolvasható, hogy a_n az $y = x \sin \pi x$ függvény 0 és 1 közötti integráljának egy közelítő összege, mégpedig az, amely az egyenletes, $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1$ felosztáshoz tartozik. Innen

$$\lim_{a_n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 x \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

3. Ugyanígy a (3) képletből közvetlenül látszik, hogy $2a_n$ az $y = \sin \pi x$ függvény 0 és 1 közti integráljának az előbbi felosztáshoz tartozó közelítőösszege. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Hetyei Gábor (Pécs, Leövey K. Gimn., III. o. t.)

4. Jelölje z a $\left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)$ komplex számot. Ekkor (3). jobb oldalán a zárójelben rendre a $z, z^2, z^3, \dots, z^{n-1}$ komplex számok képzetes része áll. Következésképp a_n éppen a $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$ összeg képzetes részének $2n$ -ed része. A mértani sor összegképletét és a $z^n = -1$ összefüggést felhasználva, ebből az adódik, hogy a_n az $\frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1$ komplex szám képzetes részének $2n$ -ed része. Könnyen ellenőrizhető, hogy $2/(1-z) = 1 + i \text{ctg } \frac{\pi}{2n}$, amiből (4) máris következik.