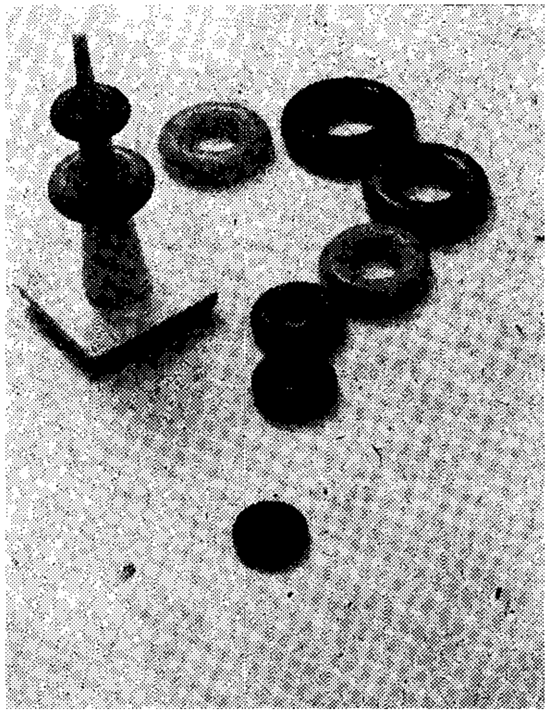
I. megoldás. Legyenek a gyűrűk nagyság szerint g_1, g_2, $\ldots$, g_9, a legkisebb gyűrű g_1, a legnagyobb g_9.

Nézzük, hányféleképpen lehet pontosan k gyűrűt elhelyezni az oszlopon. Rendeljük hozzá minden ilyen gyűrűelhelyezéshez a gyűrűk sorszámát alulról felfelé haladva leírt sorrendben. Így egy k jegyű számot kapunk. Az első jegy az először ledobott gyűrű sorszáma lesz. Ez a gyűrű nem lehet g_1, g_2, $\ldots$, g_{k-1}, hiszen ezek közül egyik sem esik lejjebb a $(k-1)$-edik pozíciónál, és utána már csak legfeljebb $(k-2)$-t, így összesen $k-1$ gyűrűt tudnánk az oszlopon elhelyezni. Az első jegy tehát nagyobb, mint $k-1$.

Általában az i-edik jegy az i-ediknek ledobott gyűrű sorszáma lesz, ez a gyűrű nem lehet a g_1, g_2, $\ldots$, g_{k-i} gyűrűk egyike sem, hiszen ez esetben csak további $k-i-1$ gyűrűnek maradna hely. [g_{k-i} a $(k-i)$-edik pozíciónál fennakad.] Az i-edik jegy tehát nagyobb, mint $k-i$.



Másrészt a k jegyű szám minden jegye különböző, mert egy gyűrű sem szerepel kétszer. Azt kaptuk tehát, hogy a k gyűrű elrendezésének egy olyan k jegyű szám felel meg, amelynek minden jegye különböző és i-edik jegye $(1 \le i \le k)$ nagyobb, mint $k-i$. Nyilvánvaló másrészt, hogy ha egy k jegyű számnak megvannak ezek a tulajdonságai, akkor a neki megfelelő számú gyűrűket sorra rádobhatjuk az oszlopra, egyik sem fog túl magasan fennakadni. (Az első után legalább $k-1$ hely, a második után legalább $k-2$, általában az i-edik után legalább $k-i$ hely marad meg.)

A gyűrű–elhelyezések és az ilyen tulajdonságú k jegyű számok között kölcsönös megfeleltetést hoztunk tehát létre.

Azt kell most már kiszámolnunk, hogy hány olyan csupa különböző jegyből álló k jegyű szám van, amelynek $1 \le i \le k$-ra az i-edik jegye nagyobb, mint $k-i$.

Az ilyen számok első jegye a k, $k+1$, $\ldots$, 9 számjegyek valamelyike lesz, ez $10-k$ lehetőség. Rögzítsük az első jegyet. Ekkor a második jegy a $k-1$, k, $k+1$, $\ldots$, 9 számjegyek valamelyike lesz, de az első jeggyel nem egyezhet meg. Így most is $10-k$ lehetőség van. Bármi is tehát az első jegy, a második $10-k$ különböző módon, választható meg a feltételeknek megfelelően. Tegyük fel általában, hogy az első i számjegyet már megválasztottuk a feltételeknek megfelelően: mind különböző és az első jegy a k, $\ldots$, 9, a második a $k-1$, k, $\ldots$, 9 stb., az i-edik a $k-i+1$, $k-i+2$, $\ldots$, k, $\ldots$, 9 számjegyek közül való. Az $(i+1)$-edik jegyet a $k-i$, $k-i+1$, $\ldots$, k, $\ldots$, 9 számok közül kell választani, hiszen a feltétel szerint az $(i+1)$-edik jegy nagyobb, mint $k-i-1$. Ez tehát $10-(k-i)$ lehetőség, de ezek között közte van az első i jegy is, ami most már nem választható. Így akárhogyan is rögzítettük az első i jegyet a feltételnek megfelelően, az $(i+1)$-edik jegyet a feltételnek megfelelően $10-k$ különböző módon választhatjuk meg. Ebből következik, hogy az első jegy $10-k$, az első két jegy $(10-k)^2$ stb., s végül a k jegy $(10-k)^k$ különböző módon választható.

Azt kaptuk tehát, hogy $(10-k)^k$ olyan k-jegyű szám van, amelynek az i-edik jegye nagyobb, mint $k-i$, ha $1 \le i \le k$. Ugyanennyi tehát azoknak a gyűrűelhelyezéseknek a száma is, ahol pontosan k gyűrűt helyeztünk el. Az összes gyűrűelhelyezések számát tehát úgy kapjuk, ha $(10-k)^k$ értékét $k = 0, 1, \ldots, 9$-re összeadjuk: $10^0 + 9^1 + 8^2 + 7^3 + 6^4 + 5^5 + 4^6 + 3^7 + 2^8 + 1^9 = 11\,378$. Ha n gyűrű van, akkor a fenti gondolatmenet azt adja, hogy az összes gyűrű elhelyezések száma $R_n = (n+1)^0 + n^1 + (n-1^2 + \ldots + (n-k)^{k+1} + \ldots + 2^{n-1} + 1^n$, például $R_0 = 1$, $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 9$, $R_4 = 23$.

Törőcsik Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A feladatot általánosabban oldjuk meg, 9 gyűrű helyett n gyűrűre. Legyen az n gyűrű nagyság szerint rendre g_1, g_2, $\ldots$, g_n, a legnagyobb g_1, a legkisebb g_n. Jelölje $f(n, k)$ azt, hogy hányféleképp tudunk pontosan

k gyűrűt az oszlopra dobni, R_n pedig a keresett gyűrűelhelyezések számát. Nyilván

$$R_n = f(n,\, n) + f(n,\, n-1) + \ldots + f(n,\, 0). \tag{1}$$

Nézzük tehát, mennyi $f(n,\, k)$ értéke, azaz hányféleképpen lehet k gyűrűt az oszlopra dobni? Nyilvánvaló, hogy ha a g_n gyűrűt az első $k-1$ lépés valamelyikében az oszlopra dobom, akkor utána több már nem fér rá, hiszen g_n mindenképp fennakad az oszlop tetején. k gyűrűt tehát csak úgy helyezhetek el, ha az első $k-1$ gyűrűt g_1, g_2, $\ldots$, g_{n-1} közül választom, majd a k-adiknak a még rá nem dobott gyűrűk közül egy tetszőlegest választok. Az első $k-1$ gyűrű a legfelső pozíciót szabadon kell hogy hagyja, különben nincs hely a k-adik gyűrűnek. Az első $k-1$ dobásnál tehát ugyanaz a helyzet, mintha a g_n gyűrű és a legfelső pozíció nem létezne: $k-1$ gyűrűt kell elhelyeznem az oszlopon, $n-1$ gyűrű közül válogathatok, és az oszlopon $n-1$ hely van. Ezt nyilván $f(n-1,\, k-1)$ különböző módon tehetem meg, az első $k-1$ gyűrűt tehát ugyanennyiféleképpen: $f(n-1,\, k-1)$ különböző módon választhatom, a k-adikat az első $k-1$ ilyen választása után mindig $(n-k+1)$-féleképp választhatom, k gyűrű elhelyezésére tehát $f(n-1,\, k-1)\cdot(n-k+1)$ különböző lehetőség van. (Nyilvánvaló, hogy minden lehetőséget számbavettünk, és minden lehetőséget pontosan egyszer vettünk számba. Végül az is nyilvánvaló, hogy minden számba vett lehetőség valóban k gyűrűnek egy jó elhelyezését adja.)

Azt kapjuk, hogy

$$f(n,\, k) = f(n-1,\, k-1)\cdot(n-k+1). \tag{2}$$

Tudjuk, hogy $f(n,\, 0) = 1$ minden n természetes számra; ebből és (1)-ből teljes indukcióval könnyen adódik, hogy $f(n,\, k) = (n-k+1)^k$. Ez ugyanis $k=0$ esetén igaz és ha tudjuk, hogy minden n-re $f(n,\, k-1) = [n-(k-1)+1]^{k-1}$, akkor (1)-ből $f(n,\, k) = f(n-1,\, k-1)\cdot(n-k+1) = [n-1-(k-1)+1]^{k-1}\cdot(n-k+1) = = (n-k+1)^k$. Azt kaptuk tehát, hogy a gyűrűket

$$R_n = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)^k$$

különböző módon lehet az oszlopra dobni. A feladat esetében

$$R_9 = 10^0 + 9^1 + 8^2 + 7^3 + 6^4 + 5^5 + 4^6 + 3^7 + 2^8 + 1 = 11\ 378.$$

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)