

$$(1) \quad \frac{a_1^k}{p_1} + \frac{a_2^k}{p_2} + \dots + \frac{a_n^k}{p_n}.$$

Megoldás. Első lépésként a $k \leq n-2$ esettel foglalkozunk. Belátjuk, hogy ez esetben a kifejezés értéke 0. Bővítjük mindegyik törtet úgy, hogy a p_n kifejezés szerepeljen a nevezőben:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^k}{p_1} &= -\frac{(a_n - a_2)(a_n - a_3) \dots (a_n - a_{n-1})a_1^k}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{n-1})p_n} \\ \frac{a_2^k}{p_2} &= -\frac{(a_n - a_1)(a_n - a_3) \dots (a_n - a_{n-1})a_2^k}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_{n-1})p_n} \\ &\vdots \\ \frac{a_i^k}{p_i} &= -\frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{i-1})(a_n - a_{i+1}) \dots (a_n - a_{n-1})a_i^k}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{n-1})p_n} \\ &\vdots \\ \frac{a_{n-1}^k}{p_{n-1}} &= -\frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-2})a_{n-1}^k}{(a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})p_n}. \end{aligned}$$

Tekintsük a következő polinomokat:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_{n-1}), \dots, \\ q_i(x) &= (x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_{n-1}), \dots, \\ q_{n-1}(x) &= (x - a_1) \dots (x - a_{n-2}). \end{aligned}$$

$$\left(\text{Vagyis legyen } Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) \text{ és } q_i(x) = \frac{Q(x)}{x - a_i} \right).$$

Nyilvánvaló, hogy $\frac{a_i^k}{p_i} = -\frac{a_i^k}{p_n} \frac{q_i(a_n)}{q_i(a_i)}$ és akkor az (1) kifejezés

$$(2) \quad \frac{a_1^k}{p_1} + \dots + \frac{a_n^k}{p_n} = \frac{1}{p_n} \left(a_n^k - \frac{q_1(a_n)}{q_1(a_1)} a_1^k - \frac{q_2(a_n)}{q_2(a_2)} a_2^k - \dots - \frac{q_{n-1}(a_n)}{q_{n-1}(a_{n-1})} a_{n-1}^k \right).$$

Itt a zárójelben az alábbi $P(x)$ polinomnak az $x = a_n$ helyen felvett értéke áll:

$$P(x) = x^k - \frac{q_1(x)}{q_1(a_1)} a_1^k - \frac{q_2(x)}{q_2(a_2)} a_2^k - \dots - \frac{q_{n-1}(x)}{q_{n-1}(a_{n-1})} a_{n-1}^k.$$

Itt $k \leq n-2$, a q_i polinomok $(n-2)$ -edfokúak, a nevezők rögzített helyettesítési értékek, a_i^k szintén konstans, $P(x)$ tehát egy (legfeljebb) $(n-2)$ -edfokú polinom.

Belátjuk, hogy P helyettesítési értéke az $x = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ helyeken rendre 0. Legyen $1 \leq i \leq n-1$. a_i egyaránt gyöke a $q_1(x), \dots, q_{i-1}(x), q_{i+1}(x), \dots, q_{n-1}(x)$ polinomoknak [hiszen ezek mindegyikében szerepel az $(x - a_1)$ tényező], tehát $q_j(a_i) = 0$, ha $j \neq i$. Következésképp

$$P(a_i) = a_i^k - \frac{q_i(a_i)}{q_i(a_i)} a_i^k = a_i^k - a_i^k = 0,$$

ahogy állítottuk.

Az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ számok mind különbözők, így azt kaptuk, hogy a legfőljebb $(n-2)$ -edfokú $P(x)$ polinomnak $n-1$ különböző helyen felvett értéke 0. Ebből viszont, mint ismeretes, már következik, hogy $P(x)$ csak az azonosan 0 polinom lehet. Másrészt (2) szerint

$$\frac{a_1^k}{p_1} + \dots + \frac{a_n^k}{p_n} = \frac{P(a_n)}{p_n},$$

így ennek a kifejezésnek is 0 az értéke, ahogy állítottuk.

Vizsgáljuk ezután a $k \geq n-1$ esetet. Legyen $j \leq n$ -re

$$\begin{aligned} &\frac{a_1^k}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_j)} + \frac{a_2^k}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_j)} + \dots + \\ &\quad + \frac{a_j^k}{(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})} = F_{k,j}. \end{aligned}$$

$j = 2$ esetében $F_{k,2} = \frac{a_1^k - a_2^k}{a_1 - a_2}$ ami mindig egész, ha a_1, a_2 egész.

Másrészt az előzőekben beláttuk, hogy $F_{k,j} = 0$, ha $k \leq j - 2$ (ha az a számok száma legalább 2-vel nagyobb k -nál). Most megmutatjuk, hogy ha $j \geq 3$, és $k \geq 1$, akkor

$$(3) \quad F_{k,j} = F_{k-1,j-1} + a_j F_{k-1,j}$$

amiből k -ra és j -re vonatkozó kettős teljes indukcióval azonnal kapjuk, hogy ha $a_1, \dots, a_n$ mind egészek, akkor $F_{k,j}$ értéke minden $k \geq 0$, $j \geq 2$ értékre egész. (3)-ból ugyanis látszik, hogy ha $F_{k-1,j}$ és $F_{k-1,j-1}$ értéke egész, akkor $F_{k,j}$ értéke is egész.

Hátra van még (3) bizonyítása. Legyen $i < j$. Ekkor

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{a_i^k}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_j)} = \\ &= \frac{a_i^{k-1}(a_i - a_j) + a_j a_i^{k-1}}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_j)} = \\ &= \frac{a_i^{k-1}}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{j-1})} + \\ &+ a_j \frac{a_i^{k-1}}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_j)}. \end{aligned}$$

Végül

$$(4') \quad \frac{a_j^k}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})} = 0 + a_j \frac{a_j^{k-1}}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})}.$$

Ha most (4) és (4') bal oldalait összeadjuk, akkor éppen $F_{k,j}$ -t kapjuk, ha pedig a jobb oldalakat adjuk össze, akkor $F_{k-1,j-1} + a_j F_{k-1,j}$ adódik. Ezzel (3)-at és a feladat állítását is beláttuk.

Megjegyzések. 1. Elég egyszerűen belátható, hogy ha az (1) kifejezésben közös nevezőre hozunk, akkor a nevező az összes $(a_i - a_j)$ alakú tényezők szorzata ($i \neq j$), és a számláló minden $i \neq j$ -re többszöröse $(a_i - a_j)$ -nek. Abban a ritka esetben, amikor az összes $a_i - a_j$ relatív prím egymáshoz, ebből már következik, hogy a nevezőben szereplő szorzattal is osztható a számláló, vagyis a kifejezés egész szám. Az általános esetben át kell előbb térni n -változós polinomokra: az a_i -ket határozatlanoknak kell venni, s úgy belátni, hogy a számláló minden $a_i - a_j$ alakú polinommal osztható. Polinomok körében már igaz, hogy ez esetben a polinom az összes ilyen $a_i - a_j$ alakú tényezők szorzatával, azaz a nevezővel is osztható. Ez a többváltozós polinomokra vonatkozó állítás azonban lényegesen mélyebb tételeken alapszik, mint amilyent a fenti bizonyításban használtunk.

2. Gyakran találkozunk a következő, úgynevezett interpolációs feladattal. Meg kell határozni azt a legkisebb fokú polinomot, amely az adott $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ helyeken rendre az adott $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ értékeket veszi fel. A feladat megoldásában szereplő $q_i(x)$ polinomok segítségével könnyen felírható egy $(n - 2)$ -ed fokú megfelelő $R(x)$ polinom:

$$R(x) = c_1 \frac{q_1(x)}{q_1(a_1)} + c_2 \frac{q_2(x)}{q_2(a_2)} + \dots + c_{n-1} \frac{q_{n-1}(x)}{q_{n-1}(a_{n-1})}.$$

Valóban láttuk, hogy $q_i(a_i) = 0$, ha $i \neq j$, tehát $R(a_i) = c_i \frac{q_i(a_i)}{q_i(a_i)} = c_i$, ahogy kívántuk.

Az $R(x)$ polinom $(n - 2)$ -edfokú (ez az ún. Lagrange-féle interpoláris polinom), és belátható, hogy általában alacsonyabb fokú polinom nem adható meg.

3. A (3) képletből levezethető, hogy $k = n - 1$ esetén $F_{k,n}$ értéke 1. Ha ugyanis $n = 2$, akkor

$$F_{n-1,n} = F_{1,2} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{a_2}{a_2 - a_1} = 1,$$

ha pedig $n \geq 3$, akkor (3) szerint

$$F_{n-1,n} = F_{n-2,n-1} + a_j F_{n-2,n}.$$

De itt $F_{n-2,n} = 0$, mint láttuk, tehát $F_{n-1,n} = F_{n-2,n-1}$. Ebből teljes indukcióval $F_{n-1,n} = F_{1,2} = 1$ adódik. Másrészt $n \geq k$ esetén teljes indukcióval az is levezethető (3)-ból, hogy $F_{k,n}$ az összes olyan $a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n}$ alakú szorzatok összege, ahol $j_1 + j_2 + \dots + j_n = k - n + 1$. (Így például $F_{n,n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $F_{n+1,n} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_1 a_2 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n$ stb.)