

$$(1) \quad a_0 = a_1 = 1,$$

$$(2) \quad a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**I. megoldás.** Számítsuk ki az  $a_0, a_1, \dots$  sorozat első pár tagját:

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 41, \quad a_6 = 99, \quad a_7 = 239, \quad \text{és} \quad a_8 = 577.$$

Ha a  $2(a_{2n}^2 - 1)$  kifejezés értékét is kiszámítjuk  $n = 1, 2, 3, 4$ -re, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2(a_2^2 - 1) &= 16 = 4^2 = (1 + 3)^2 \\ 2(a_4^2 - 1) &= 576 = 24^2 = (7 + 17)^2 \\ 2(a_6^2 - 1) &= 19\,600 = 140^2 = (41 + 99)^2 \\ 2(a_8^2 - 1) &= 665\,856 = 816^2 = (239 + 577)^2. \end{aligned}$$

Valószínűnek látszik tehát, hogy általában igaz a

$$(3) \quad 2(a_{2n}^2 - 1) = (a_{2n} + a_{2n-1})^2$$

összefüggés. Ezt fogjuk most teljes indukcióval belátni. Láttuk, hogy  $n = 1, 2$ -re (3) teljesül. Tegyük most fel, hogy  $k \geq 2$  és  $2n = 2k - 2$ -re igaz a fenti összefüggés, azaz

$$(4) \quad 2(a_{2k-2}^2 - 1) = (a_{2k-2} + a_{2k-3})^2.$$

Ebből akarjuk bebizonyítani, hogy

$$(5) \quad 2(a_{2k}^2 - 1) = (a_{2k} + a_{2k-1})^2$$

is fennáll.

Vonjuk ki (5) bal oldalából (4) bal oldalát: A különbség  $2(a_{2k}^2 - a_{2k-2}^2) = 2(a_{2k} - a_{2k-2})(a_{2k} + a_{2k-2})$ . Az első zárójelben (2) szerint  $2a_{2k-1}$  áll, tehát (5) és (4) bal oldalának különbsége  $4a_{2k-1}(a_{2k} + a_{2k-2})$ . Másrészt a jobb oldalak különbsége

$$(a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + a_{2k-3})(a_{2k} + a_{2k-1} - a_{2k-2} - a_{2k-3}).$$

Az első tényezőnél  $a_{2k}$ -ra, majd  $a_{2k-2}$ -re alkalmazva a (2) összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + a_{2k-3} = 3a_{2k-1} + 2a_{2k-2} + a_{2k-3} = 4a_{2k-1}.$$

A második tényezőben  $a_{2k} - a_{2k-2} - a_{2k-3} = a_{2k-2}$  [most  $a_{2k-2}$ -re alkalmaztuk (2)-t]. A két jobb oldal különbsége tehát  $4a_{2k-1}(a_{2k} + a_{2k-2})$ .

Látjuk tehát, hogy (5) és (4) bal oldalának különbsége megegyezik a két jobb oldal különbségével. Minthogy (4) az indukciós feltevés szerint igaz, ebből következik, hogy (5) is igaz. Ezzel az indukciós lépést, s egyszersmind (3)-at is bebizonyítottuk. Minthogy pedig  $a_{2k} + a_{2k-1}$  minden  $k$ -ra természetes szám, ezzel azt is beláttuk, hogy  $2(a_{2k}^2 - 1)$  minden természetes számra teljes négyzet.

**II. megoldás.** (3) felírható úgy is, hogy

$$(3') \quad 2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2 = 2.$$

Be fogjuk látni, hogy ha  $a_0, a_1$  tetszőleges számok és  $n \geq 1$ -re  $a_{n+1}$ -et a (2) egyenlet definiálja, akkor minden  $n \geq 2$ -re

$$(6) \quad 2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2 = 2a_{2n-2}^2 - (a_{2n-2} + a_{2n-3})^2.$$

Ebből már következik, hogy  $2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2$  értéke független  $n$ -től és megegyezik  $2a_2^2 - (a_2 + a_1)^2$  értékével. A feladat esetében ez az érték éppen 2, mert  $a_1 = 1, a_2 = 3$ . Ha tehát belátjuk, hogy minden  $a_n$  sorozatra, amelyre (2) teljesül, (6) is teljesül, ebből (3') és a feladat állítása már következik.

Jelöljük  $u$ -val  $a_{2n-2}$ -t és  $v$ -vel  $a_{2n-2} + a_{2n-3}$ -at. Próbáljuk meg  $a_{2n}$ -t és  $(a_{2n} + a_{2n-1})$ -et kifejezni  $u$ -val és  $v$ -vel! Ehhez a (2) egyenletet használjuk:

$$a_{2n} = 2a_{2n-1} + a_{2n-2} = 2(2a_{2n-2} + a_{2n-3}) + a_{2n-2} = 3u + 2v$$

$$a_{2n} + a_{2n-1} = 3a_{2n-1} + a_{2n-2} = 3(2a_{2n-2} + a_{2n-3}) + a_{2n-2} = 4u + 3v.$$

(6) tehát azt állítja, hogy

$$2(3u + 2v)^2 - (4u + 3v)^2 = 2u^2 - v^2,$$

ami minden  $u, v$  számpárra fennáll. Beláttuk tehát, hogy a (2) egyenletből (6) minden  $n \geq 2$ -re következik, ami bizonyítandó volt.

**III. megoldás.** Próbáljuk meg  $a_n$ -t  $c\lambda^n + d\mu^n$  alakban felírni, ahol  $c, d, \lambda, \mu$  alkalmas konstansok.  $a_n$ -re teljesül a (2) egyenlet, ami azt jelenti, hogy minden  $n$ -re teljesülnie kell a

$$c\lambda^n + d\mu^n = 2c\lambda^{n-1} + 2d\mu^{n-1} + c\lambda^{n-2} + d\mu^{n-2}$$

egyenlőségeknek. Átalakítások után azt kapjuk, hogy minden  $n$ -re

$$c\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + d\mu^{n-2}(\mu^2 - 2\mu - 1) = 0.$$

Ha most  $\mu$ -t és  $\lambda$ -t az  $x^2 - 2x - 1 = 0$  másodfokú egyenlet két gyökének,  $(1 + \sqrt{2})$ -nek, ill.  $(1 - \sqrt{2})$ -nek választjuk, ez mindig teljesülni fog. Ha tehát  $a_n = c(1 + \sqrt{2})^n + d(1 - \sqrt{2})^n$ , akkor a (2) egyenlet minden  $n$ -re teljesül.

Szükségünk van még arra is, hogy  $a_0 = 1$  és  $a_1 = 1$  legyen, azaz

$$c(1 + \sqrt{2})^0 + d(1 - \sqrt{2})^0 = c + d = 1 \quad \text{és} \quad c(1 + \sqrt{2}) + d(1 - \sqrt{2}) = 1$$

is teljesüljön. A két egyenletet  $c$ -re,  $d$ -re megoldva azt kapjuk, hogy  $c = d = 1/2$ .

Következésképp az

$$a'_n = \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

képlettel definiált sorozatra teljesül, hogy

$$a'_0 = a'_1 = 1 \quad \text{és} \quad a'_{n+1} = 2a'_n + a'_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Teljes indukcióval azonnal látható, hogy az  $a'_n$  sorozat megegyezik a feladatban definiált  $a_n$  sorozattal. Azt kaptuk tehát, hogy

$$(7) \quad a_n = \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right).$$

(Megjegyzendő, hogy a jobb oldalon – bár ez az első pillanatban nem látszik – egész szám áll.)

A feladat állítása mármost az, hogy  $2(a_{2n}^2 - 1)$  teljes négyzet. (7) szerint

$$\begin{aligned} 2(a_{2n}^2 - 1) &= 2 \left[ \frac{1}{4} \left( (1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^{4n} + (1 - \sqrt{2})^{4n} \right] + \frac{2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^{2n} (1 - \sqrt{2})^{2n}}{4} - 2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^{4n} + (1 - \sqrt{2})^{4n} \right] - 1 = \left( \frac{(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy a nagy zárójelben egész szám áll. A binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^{2n} &= 1 + \binom{2n}{1}\sqrt{2} + \binom{2n}{2}\sqrt{2}^2 + \binom{2n}{3}\sqrt{2}^3 + \dots + \binom{2n}{2k}\sqrt{2}^{2k} + \binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1} + \dots + \sqrt{2}^{2n} \\ (1 - \sqrt{2})^{2n} &= 1 - \binom{2n}{1}\sqrt{2} + \binom{2n}{2}\sqrt{2}^2 - \binom{2n}{3}\sqrt{2}^3 + \dots + \binom{2n}{2k}\sqrt{2}^{2k} - \binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1} + \dots + \sqrt{2}^{2n}. \end{aligned}$$

Ha a fenti két kifejezést kivonjuk egymásból, azok a tagok, ahol  $\sqrt{2}$  páros kitevővel szerepel, kiesnek, azaz

$$(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} = 2\sqrt{2} \left[ \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3}\sqrt{2}^2 + \dots + \binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k} + \dots + \binom{2n}{2n-1}\sqrt{2}^{2n-2} \right].$$

Itt a nagy zárójelben  $\sqrt{2}$  mindig páros kitevővel szerepel, vagyis csupa egész számot kell összeadni. Következésképp  $\left[ (1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right] / \sqrt{2}$  egész szám, amint bizonyítani akartuk.

*Megjegyzések.* 1. Mindhárom megoldás gondolatmenetével bebizonyítható az is, hogy  $2(a_{2n+1}^2 + 1)$  szintén teljes négyzet. Az első két megoldás gondolatmenete alapján

$$2(a_{2n+1}^2 + 1) = (a_{2n+1} + a_{2n})^2.$$

2. A II. megoldás valójában azt adja, hogy a feladat sorozatára

$$2a_n^2 - (a_n + a_{n-1})^2 = (-1)^n \cdot 2.$$

$a_n^2$ -tel osztva és a bal oldalt tényezőkre bontva kapjuk, hogy

$$\left(\sqrt{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right) = \frac{2 \cdot (-1)^n}{a_n^2};$$

Nyilvánvaló, hogy  $\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} > 1 > 2 - \sqrt{2}$ , ezt a második zárójelbe beírva átosztás után adódik, hogy

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right| < \frac{1}{a_n^2}.$$

Az  $a_n$  nevezőjű  $(a_n + a_{n-1})/a_n$  tört tehát  $1/a_n^2$ -nél *közelebb* van  $\sqrt{2}$ -höz: Ez jó közelítésnek számít, hiszen ha  $q$  egész, akkor a  $\frac{q}{q}, \frac{q+1}{q}, \dots, \frac{2q}{q}$  alakú törtek közül  $\sqrt{2}$ -höz legközelebbiről általában csak annyit mondhatunk, hogy legföljebb  $\frac{1}{2q}$  távolságra van  $\sqrt{2}$ -től. Minthogy  $a_n$  nagyon gyorsan nő és tart a végtelenbe, nagy  $n$ -ekre a fenti becslés a „legjobb”  $a_n$  nevezőjű törtről, azaz  $(a_n + a_{n-1})/a_n$ -ről lényegesen erősebbet állít. Másrészt könnyen bebizonyítható, hogy a „legjobb”  $q$  nevezőjű tört ( $q$  egész) is mindig legalább  $\frac{1}{3q^2}$  távolságra van  $\sqrt{2}$ -től.