

$$(1) \quad 2n < 4^{1/n} + 4^{2/n} + \dots + 4^{n/n} \leq 3n.$$

I. megoldás. Jelöljük $(4^{1/n} + 4^{2/n} + \dots + 4^{n/n})/n$ értékét T_n -nel. Azt kell megmutatnunk, hogy $2 < T_n \leq 3$. $n > 1$ esetén T_n a különböző $4^{1/n}, 4^{2/n}, \dots, 4^{n/n}$ számok számtani közepe, s így biztosan nagyobb ugyanezeknek a számoknak a mértani közepénél. A számok szorzata maga is 4 hatványa, melynek kitevője

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2},$$

így a számok mértani közepe nagyobb, mint $\sqrt[n]{4^{n/2}} = 2$. Ezzel az (1) bal oldalán álló egyenlőtlenséget beláttuk.

Ha n páros, a jobb oldalon álló egyenlőtlenséget abból kapjuk, hogy $j = 1, 2, \dots, n/2$ mellett $4^{j/n} \leq 4^{1/2} = 2$, $j = n/2 + 1, \dots, n$ mellett pedig $4^{j/n} \leq 4^{n/n} = 4$

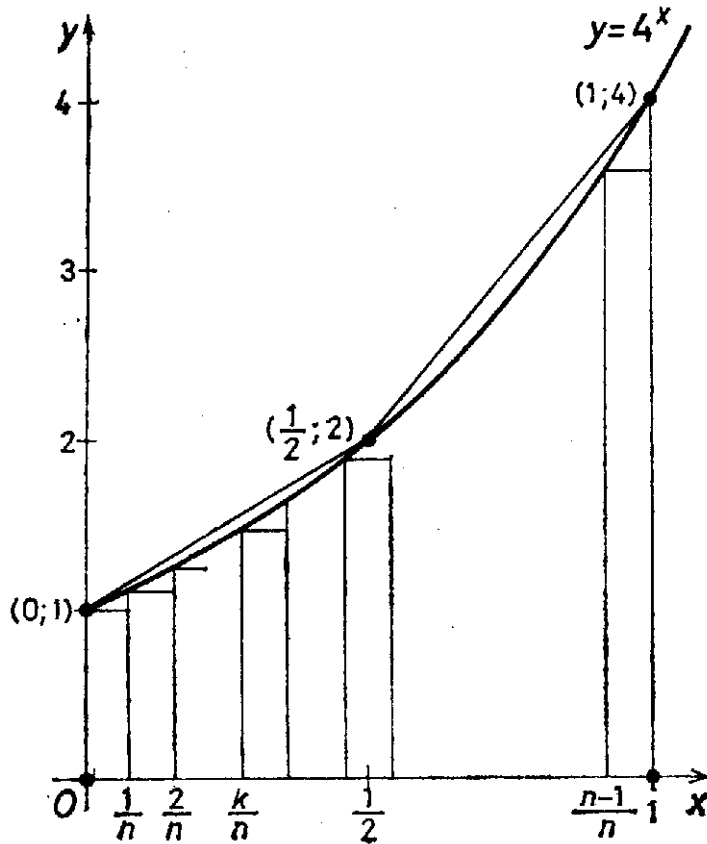
Ha n egynél nagyobb páratlan szám, azaz $n = 2m + 1$ alakú valamely $m \geq 1$ egész számra, akkor ugyanazt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk, csak most összegünk középső tagját külön meg kell becsülnünk. $j = 1, 2, \dots, m$ -re $4^{j/n} \leq 4^{m/n} < 4^{1/2} = 2$, $j = m + 1$ esetén $j/n = (m+1)/(2m+1) \leq 2/3$, mert $m \geq 1$, következésképp $4^{j/n} \leq 4^{2/3} < 3$, végül $j = m + 2, \dots, n$ -re $4^{j/n} \leq 4^{n/n} = 4$. Ezért

$$4^{1/n} + 4^{2/n} + \dots + 4^{n/n} \leq m \cdot 2 + 3 + m \cdot 4 = (2m + 1) \cdot 3 = 3n.$$

Ezzel (1) jobb oldalát is beláttuk.

II. megoldás, az (1) jobb oldalán álló egyenlőtlenségre.

T_n értékét grafikusan szemléltetjük. Tekintsük az $(x; y)$ koordináta-rendszerben azokat a téglalapokat, amelyeknek alapja az x tengelyen van, hossza $\frac{1}{n}$, egy-egy csúcsuk pedig $j = 0, 1, \dots, n-1$ mellett a $(j/n, 4^{j/n})$ pontban.



1. ábra

Ezeknek a téglalapoknak a területösszege (1. ábra)

$$\frac{1}{n} \cdot 4^{0/n} + \frac{1}{n} \cdot 4^{1/n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot 4^{(n-1)/n} = \frac{1}{n} + T_n - \frac{1}{n} 4^{n/n} = T_n - \frac{3}{n}.$$

Másrészt ezek a téglalapok benne vannak abban az ötszögben, amelynek csúcsai a $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;4)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(0;1)$ pontok, ugyanis a téglalapoknak az x tengellyel párhuzamos oldalai teljesen a 4^x függvény alatt maradnak, viszont

a $(0;1)$ és $(\frac{1}{2}; 2)$, valamint az $(\frac{1}{2}; 2)$ és $(1;4)$ pontokat összekötő hűrok teljesen a 4^x függvény fölött haladnak. (Felhasználtuk, hogy a 4^x függvény monoton nő és konvex.) Ez az ötszög két trapézból tehető össze, amelyek területe $3/4$, illetve $6/4$, így azt kapjuk, hogy a téglalapok területösszege kisebb $9/4$ -nél, azaz

$$T_n - \frac{3}{n} \leq \frac{9}{4}.$$

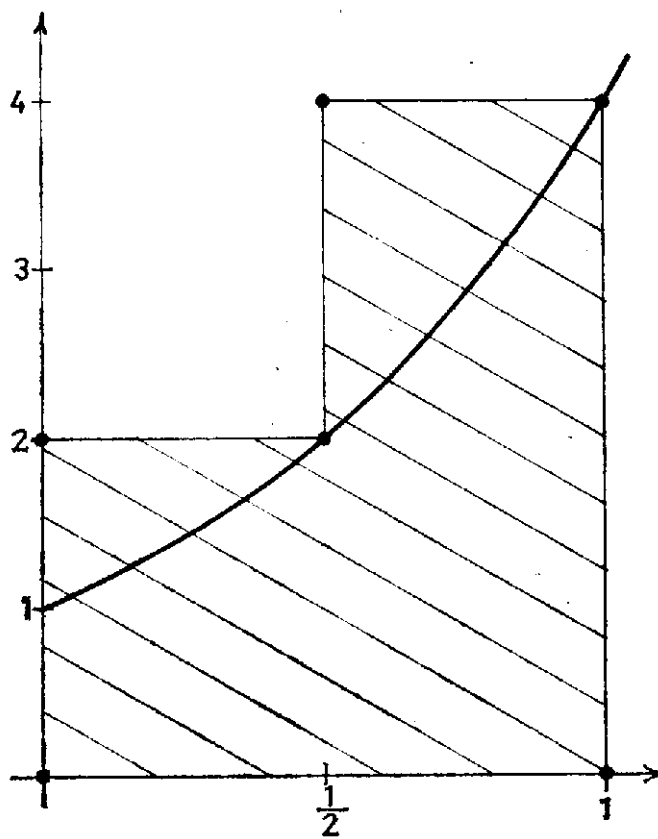
Ebből átalakítással az adódik, hogy

$$(2) \quad nT_n = 4^{1/n} + 4^{2/n} + \dots + 4^{n/n} \leq \frac{9}{4}n + 3.$$

Ha $n \geq 4$, akkor $(9/4)n + 3 \leq 3n$, így (2)-ből $n \geq 4$ -re az (1) jobb oldalán álló egyenlőtlenség már következik. $n = 2, 3$ -ra (1) számolással könnyen ellenőrizhető.

Megjegyzések. 1. (2) nagy n -ekre lényegesen jobb közelítést ad, mint (1), de kis n értékekre (1)-et külön ellenőrizni kellett. A fent használt grafikus módszerre általában is jellemző, hogy nagy n -ekre nagyon jó becslést ad, de kis n -ekre nem mindig használható.

2. Az I. megoldás bizonyítása is szemléltethető volna geometriailag, ott a téglalapokat lényegében a $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;4)$, $(1/2;4)$, $(1/2;2)$, $(0;2)$ pontok alkotta hatszögbe foglaltuk bele. (2. ábra)



2. ábra

3. Mivel azok a számok, amelyeknek T_n a számtani közepe, egy $4^{1/n}$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, T_n zárt alakra hozható:

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{4^{(n+1)/n} - 4^{1/n}}{4^{1/n} - 1} = \frac{1}{n} 4^{1/n} \frac{3}{4^{1/n} - 1}.$$

Eszerint $3/T_n = (1 - 4^{-1/n}) / (\frac{1}{n})$ az $f(x) = 4^{-x}$ függvény $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{n}$ helyekhez tartozó differencia-hányadosa.

(1) ennek alapján is belátható, sőt az is kiolvasható ebből, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{T_n} = f'(0) = \ln 4,$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 3/\ln 4$.

4. A megoldásban használt téglalapok a 4^x függvény $(0,1)$ szakasz feletti darabja és az x tengely közötti idom területének alsó közelítői, T_n határértéke pedig az $\int_0^1 4^x dx$ integrállal egyenlő.