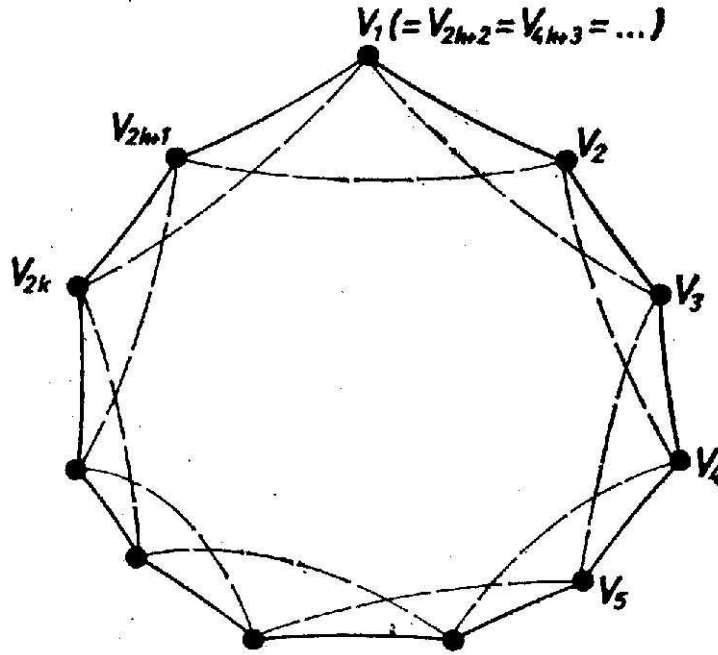


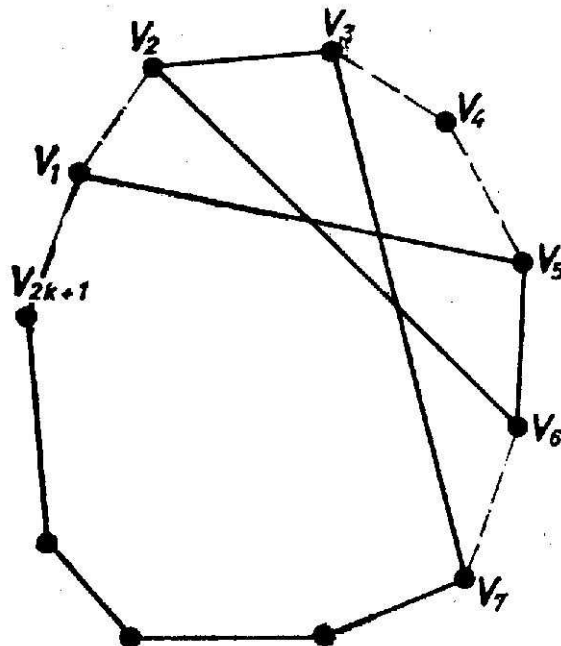
Ha egy körút l darab várost érint, és csak autóbust (csak repülő) kell hozzá igénybe vennünk, akkor azt fogjuk mondani, hogy ez egy l hosszúságú autóbuzskörút (repülőkörút).

Tegyük fel, hogy $k \geq 3$ és van $2k + 1$ hosszú autóbuzskörút. Bebizonyítjuk, hogy ekkor vagy van $2k$ hosszú autóbuzskörút, vagy van $2k$ hosszú repülőkörút. Legyenek a $2k + 1$ hosszú autóbuzskörút során érintett városok (az érintés sorrendjében) $V_1, V_2, \dots, V_{2k+1}, V_1$. Az egyöntetű jelölés kedvéért ciklikusan kiterjesztjük a V_i városok indexelését: $V_{2k+1+i} = V_i$ minden i egészre.

Legyen j tetszőleges egész, és helyettesítsük a $V_1V_2V_3 \dots V_{2k+1}V_1$ körút V_j $V_{j+1}V_{j+2}$ szakaszát a közvetlen V_jV_{j+2} járáttal. Ha ez a járat autóbuzsjárat, akkor máris kaptunk egy $2k$ hosszú autóbuzskörutat. Ha viszont V_j és V_{j+2} között minden j -re repülő jár, akkor először is csinálhatunk egy $2k+1$ hosszú repülőkörutat: $V_1V_3V_5 \dots V_{2k+1}V_2V_4 \dots V_{2k}V_1$. Ezt a körutat így is felírhatjuk: $V_1V_3V_5 \dots V_{2k+1}V_{2k+3}V_{2k+5} \dots V_{4k+1}V_{4k+3} (= V_1)$. (Az 1. ábrán ezt a körutat a szaggatott élek jelzik.) Legyen j tetszőleges egész, és helyettesítsük ebben a körútban a $V_jV_{j+2}V_{j+4}$ szakaszt a V_jV_{j+4} közvetlen járáttal. Ha ez a járat repülőjárat, akkor így ezzel $2k$ hosszú repülőúthoz jutottunk.



1. ábra



2. ábra

Marad tehát az az eset, ha V_j és V_{j+4} között is minden j -re autóbuzsjár. Ez esetben viszont menjünk végig a következő útvonalon. $V_1V_5V_6V_2V_3V_7 \dots V_{2k+1}V_1$, ahol $k = 3$ esetén a $V_7 \dots V_{2k+1}$ szakasz az egyetlen $V_7 = V_{2k+1}$ városból áll, $k > 3$ esetén pedig V_7 és V_{2k+1} között „egyesével” haladunk. Ez az útvonal csupa autóbuzsjáratot használ,

és ha $k \geq 3$, akkor ez egy $2k$ hosszú körút (lásd a 2. ábrát). Így tehát most is egy $2k$ hosszú autóbuszkörúthoz jutottunk. Ezzel beláttuk, hogyha van $2k + 1$ hosszú autóbuszkörút, akkor vagy van $2k$ hosszú autóbuszkörút vagy van $2k$ hosszú repülőkörút.

Az autóbusz és repülő szerepének felcserélésével ugyanez a gondolatmenet azt is adja, hogy ha van $2k + 1$ hosszú repülőkörút, akkor szintén van $2k$ hosszú autóbuszkörút vagy $2k$ hosszú repülőkörút.

Mivel pedig *nincs* $2k$ hosszú autóbusz- és repülőkörút, így $2k + 1$ hosszú autóbusz- és repülőkörút sincsen. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. $k = 2$ esetén a $V_1V_5V_6V_2V_3V_7 \dots V_{2k+1}V_1$ útvonal nem körút, hiszen ebben az esetben már $V_6 = V_1$. Tehát $k = 2$ -re a feladat állítása nem is igaz: ha $V_1V_2V_3V_4V_5V_1$ autóbuszkörút, $V_1V_3V_5V_2V_4V_1$ viszont repülőkörút, akkor a 4 hosszú körutakhoz mindig szükség van autóbuszra is, repülőre is, és mégis van 5 hosszú autóbuszkörút (sőt repülőkörút is).