

A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha  $n = 1$ , akkor összesen 2 játékos van, ezek egy mérkőzést játszanak. A győztes lesz  $V_1$ , a vesztes  $V_2$ , és a feladat állítása nyilván teljesül.

Tegyük fel ezután, hogy az állítás  $n$ -re igaz, és hogy  $2^{n+1}$  versenyző játszik körmérkőzést. Azt kell belátnunk, hogy van  $n + 2$  versenyző,  $V_1, \dots, V_{n+1}, V_{n+2}$ , akik közül  $V_i$  akkor és csak akkor győzte le  $V_j$ -t, ha  $i < j$ .

Legyen  $V$  egy tetszőleges játékos.  $V$  a körmérkőzés során  $2^{n+1} - 1$  ellenféllel játszott. Ezek között lesz  $2^n$ , akikkel szemben ugyanazt az eredményt éri el (vagy mindegyiket legyőzi, vagy mindegyiktől kikap). Ellenkező esetben ugyanis legfeljebb  $2^n - 1$  ellenfelét győzhetné le és legfeljebb  $2^n - 1$  ellenfelétől kaphatna ki, de ez összesen legfeljebb  $2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$  ellenfél volna. Ez a  $2^n$  játékos (akivel szemben  $V$  ugyanolyan eredményt ért el), szintén teljes körmérkőzést játszott, így az indukciós feltevésünk szerint van köztük  $W_1, \dots, W_{n+1}$ , akik közül  $W_i$  pontosan akkor győzte le  $W_j$ -t, ha  $i < j$ . Most  $V$  vagy mindegyik  $W_i$ -t legyőzte, vagy mindegyiktől kikapott. Az első esetben legyen  $V_1 = V$ ,  $V_2 = W_1, \dots, V_{n+1} = W_n, V_{n+2} = W_{n+1}$ , a második esetben legyen  $V_1 = W_1, \dots, V_{n+1} = W_{n+1}, V_{n+2} = V$ . A  $V_i$ -k ilyen választása mellett  $V_i$  pontosan akkor győzte le  $V_j$ -t, ha  $i < j$ .

Mindenképp találtunk tehát  $n + 2$  versenyzőt a kívánt tulajdonsággal. Ezzel a teljes indukciós lépést és a feladat állítását bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* Erősebb módszerekkel bizonyítható, hogy  $2^n$  játékos körmérkőzése után  $2n$  versenyzőt már nem feltétlenül lehet találni a kívánt tulajdonsággal. Feltehető a következő kérdés: mekkora az a legnagyobb  $m$  szám, amelyre igaz, hogy  $2^n$  játékos körmérkőzése után feltétlenül van  $m$  versenyző,  $V_1, \dots, V_m$ , akik közül  $V_i$  pontosan akkor győzte le  $V_j$ -t, ha  $i < j$ ? A feladat azt állítja, hogy  $m \geq n + 1$ , másrészt – mint említettük –  $m < 2n$ . Nem ismeretes azonban, hogy  $m$  az  $n + 1$  és a  $2n$  között pontosan hol helyezkedik el.