

Legyen X és Y a valós számoknak egy-egy részhalmaza. Az $X \cdot Y$ jelöli azt a halmazt, amelynek azok és csak azok a valós számok az elemei, melyek megkaphatók egy X -beli és egy Y -beli valós szám szorzataként; $X + Y$ pedig azt, amelynek elemei az X -beli és Y -beli számok összegeként állíthatók elő. Melyek azok a c valós számok, melyekhez létezik a valós számoknak olyan valódi, nem üres X részhalmaza, amelyre

$$(1) \quad X \cdot X + \{c\} = X?$$

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy minden c valós számhoz megadható olyan X halmaz, amely teljesíti (1)-et, és nem üres, valódi részhalmaza az összes valós szám halmazának. Tekintsük ugyanis az összes egész együtthatós egyváltozós polinomot, és helyettesítsünk mindegyik polinomba c -t. Az így kapott helyettesítési értékek halmaza legyen X . Nyilvánvaló, hogy X nem üres, és csak megszámlálható sok eleme van, tehát valódi részhalmaza az összes valós szám halmazának.

Az $X \cdot X + \{c\}$ halmaz egy tetszőleges elemét úgy kaphatjuk meg, hogy veszünk két egész együtthatós polinomot, $p(x)$ -et és $q(x)$ -et, mindkettőbe behelyettesítjük a c értéket, a kapott helyettesítési értékeket összeszorozzuk, és a szorzathoz hozzáadunk c -t. Ugyanezt az értéket megkaphatjuk úgy is, ha a $p(x) \cdot q(x) + x$ polinomba helyettesítjük a c értéket. De a $p(x) \cdot q(x) + x$ polinom egész együtthatós, mivel $p(x)$ és $q(x)$ is az. Beláttuk tehát, hogy az $X \cdot X + \{c\}$ halmaz tetszőleges eleme előállítható úgy, hogy egy egész együtthatós polinomba c -t helyettesítünk. Következésképp

$$(2) \quad X \cdot X + \{c\} \subseteq X.$$

Másrészt igaz a fordított irányú tartalmazás is. X egy tetszőleges eleme $p(c)$ alakú, ahol $p(x)$ egész együtthatós polinom. Nyilvánvaló, hogy $p(c) = 1 \cdot (p(c) - c) + c$, és itt $1 \in X$, $p(c) - c \in X$, mivel az azonosan 1 polinom és a $p(x) - x$ polinom is egész együtthatós. Így tehát

$$X \cdot X + \{c\} \supseteq X,$$

ami (2)-vel együtt (1)-et adja, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzések. 1. Hasonló gondolatmenettel belátható az is, hogy

$$(3) \quad X \cdot X = X + X = X + \{c\} = X.$$

Ebből pedig az is következik már, hogy X „bármilyen hatványa” és „pozitív egész számszorosa” is X . Értelmezhető két halmaz, U és V , különbsége, $U - V$ is: az $U - V$ halmazba azok a valós számok tartoznak, amelyek egy U -beli és egy V -beli valós szám különbségeként előállíthatók. Nem nehéz belátni, hogy a fent definiált X halmazra még

$$(4) \quad X - X = X \quad \text{és} \quad \{0\} - X = X$$

is igaz. (3)-ból és (4)-ből következik, hogy ha $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tetszőleges egészek, akkor

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + \{c\} = X.$$

2. Érdemes megvizsgálni, mi történik, ha X -ről megköveteljük azt is, hogy véges legyen.

a) Ha azokat a c valós számokat keressük, amelyekhez létezik *egy elemű* X halmaz, amelyre (1) fennáll, akkor – más szavakkal – azokat a c valós számokat keressük, amelyekhez van olyan y valós szám, amelyre $y^2 + c = y$. Minthogy az $y^2 - y + c = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $1 - 4c$, az egyenletnek pontosan akkor van valós megoldás, ha $c \leq 1/4$. Tehát pontosan akkor van az (1)-nek megfelelő egy elemű X halmaz, ha $c \leq 1/4$. ($c = 1/4$ esetén $X = \{1/2\}$, $c < 1/4$ esetén két megfelelő halmaz is van:

$$X = \{(-1 + \sqrt{1 - 4c})/2\} \quad \text{és} \quad X = \{(-1 - \sqrt{1 - 4c})/2\}.$$

b) Teljesen megváltozik a helyzet, ha X -ről kikötjük, hogy *legalább két elemű* (de azért véges) legyen: ez esetben csak $c = 0$ -hoz és $c = -1$ -hez van ilyen halmaz, $c = -1$ esetén $X = \{-1, 0\}$, $c = 0$ esetén $X = \{1, 0\}$, $X = \{1, -1\}$ vagy $X = \{1, 0, -1\}$.