

Azokat a számokat, amelyek előállíthatók  $n$  pozitív egész szám reciprokának az összegeként,  $n$ -jő számoknak fogjuk nevezni.

Minden  $n$ -jő szám pozitív, így pl. a 0, vagy bármely negatív racionális szám megfelel a feladat állításának. A feladatnak a továbbiakban azt az értelemszerű élesítését bizonyítjuk be, hogy van 1-nél kisebb *pozitív* racionális szám, amely nem  $n$ -jő. Be fogjuk látni, hogy ha  $x_1, \dots, x_j, \dots, n$ -jő számokból álló végtelen sorozat, akkor van (nem feltétlenül szigorúan) monoton csökkenő végtelen rész-sorozata. Ha ezt belátjuk, ebből a feladat állítása már következik. Tekintsük ugyanis az  $1 - 1/2, 1 - 1/3, \dots, 1 - 1/j, \dots$  sorozatot. Ennek a sorozatnak nyilván nincsen végtelen hosszú monoton csökkenő részsorozata, tehát nem lehet minden tagja  $n$ -jő.

Tegyük fel, hogy az  $x_1, \dots, x_j, \dots$  sorozat elemei  $n$ -jők, vagyis előállnak

$$(1) \quad \begin{array}{l} x_1 = 1/m_{11} + \dots + 1/m_{1n} \\ \vdots \\ x_j = 1/m_{j1} + \dots + 1/m_{jn} \\ \vdots \end{array}$$

alakban, ahol a jobb oldalon minden nevező pozitív egész. Tekintsük az első nevezőkből képezett  $m_{11}, \dots, m_{j1}, \dots$  sorozatot. Ez csupa pozitív egészből álló végtelen sorozat, így vagy van szigorúan monoton növekvő részsorozata, vagy valamely pozitív egész végtelen sokszor ismétlődik benne. Mindenképpen van tehát (nem feltétlenül szigorúan) monoton növekvő részsorozata. Válasszunk ki egy ilyen végtelen monoton növekvő részsorozatot, a többit töröljük az (1) táblázatból a hozzá tartozó egész sorral együtt. A megmaradó táblázatban tekintsük a második nevezők sorozatát. Ez a sorozat is pozitív egészekből áll, van tehát monoton növekvő végtelen részsorozata. Válasszunk ki egy ilyen részsorozatot a hozzá tartozó  $x_j$ -kel együtt, és a többi  $x_j$  sorát hagyjuk el a táblázatból. Ennek az eljárásnak  $n$ -szeri ismétlésével az eredeti (1) táblázatnak egy olyan végtelen résztáblázatához jutunk, amelyben a jobb oldali  $k$ -adik tagok nevezőiből képzett  $m_{1k}, \dots, m_{jk}, \dots$  sorozat (minden 1 és  $n$  közötti  $k$ -ra) monoton nő, tehát az  $1/m_{1k}, \dots, 1/m_{jk}, \dots$  sorozat monoton csökken. A bal oldalon álló sorozat tehát  $n$  darab monoton csökkenő sorozat összegeként áll elő, következésképpen maga is monoton csökkenő. Minthogy pedig a bal oldalon éppen az eredeti  $x_1, \dots, x_j, \dots$  sorozatnak egy végtelen részsorozata maradt, ezzel állításunkat és a feladat (módosított) állítását is bebizonyítottuk.