

A három dobott szám összege csak akkor osztható 3-mal, ha a számok 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják, vagy ha 3-mal osztva páronként különböző maradékot adnak. Jelölje a , b , c az ikozaéderen szereplő $3k$, $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú számok számát.

Arra, hogy mindhárom dobott szám $3k$ alakú legyen a^3 lehetőség van. Ugyanígy b^3 , ill. c^3 lehetőség van arra, hogy a három dobott szám mindegyike $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú legyen.

A három szám $3! = 6$ sorrendben adhat különböző maradékot, és ha a maradékok sorrendjét rögzítjük, a három számot abc -féleképpen választhatjuk ki. Összesen $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$ olyan eset van tehát, amikor a három dobott szám összege osztható 3-mal. Az összes lehetséges dobások száma pedig $(a+b+c)^3$. A bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc}{(a+b+c)^3} \geq \frac{1}{4};$$

Ha az $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$ és $\frac{c}{a+b+c}$ mennyiségeket rendre p , q ill. r -rel jelöljük, akkor $p+q+r=1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ és a fenti egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$(1) \quad p^3 + q^3 + r^3 + 6pqr \geq \frac{1}{4};$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy ez az egyenlőtlenség a $p+q+r=1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ feltételek mellett teljesül.

A továbbiakban már „elfeledkezhetünk” arról, mit jelent p , q , r . (1) szimmetrikus p -ben, q -ban és r -ben, így feltehetjük, hogy $p \geq q \geq r$.

$q^3 + r^3 = (q+r)^3 - 3qr(q+r)$, ami a $p+q+r=1$ feltétel mellett ekvivalens azzal, hogy $q^3 + r^3 = (1-p)^3 + 3(p-1)qr$. Az (1) egyenlőtlenség ekvivalens tehát azzal, hogy a

$$(2) \quad p^3 + (1-p)^3 + 3qr(3p-1) \geq \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenség minden nem negatív p , q , r -re fennáll. Feltevésünk szerint $p \geq q \geq r$ és $p+q+r=1$, így $p \geq \frac{1}{3}$. Következésképp

$$3qr(3p-1) \geq 0,$$

ha q , r nem negatív. Végül

$$p^3 + (1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2 = \frac{3}{4}(1-2p)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4};$$

A két utolsó egyenlőtlenségből (2) következik, és ezt kellett bizonyítani.

Alberti Gábor (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A most bizonyított állítás átfogalmazható a következőképpen. Egy urnában van M papírdarab, mind-egyikre egy-egy egész szám van írva. Háromszor húzunk az urnából, a papíron álló számot feljegyezzük, majd a papírt visszadobjuk. Ekkor legalább $1/4$ a valószínűsége annak, hogy a három feljegyzett szám összege osztható 3-mal. A bizonyításban azonban nem használtuk ki, hogy $n=20$, vagyis hogy az ikozaédernek 20 lapja van. A közben bevezetett p , q , r annak a valószínűsége, hogy a dobott (húzott) szám $3k$, $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú. A bizonyításból az is kiadódik, hogy az $1/4$ valószínűség pontosan akkor érhető el, ha a p , q , r számok közül az egyik 0, a másik kettő pedig $1/2$. (S. L.)