A feladat állításán túlmenően megmutatjuk, hogy ha első sorozatként a természetes számok egy tetszőleges (csupa különböző számból álló) részsorozatát választjuk, és a feladatban megadott eljárással lépésről lépésre új sorozatot gyártunk belőle, akkor az első sorozatban szereplő minden természetes szám végtelen sok sorozatnak lesz az első eleme. Meggondolásunkban szükség van a következő definícióra: Ha egy n szám a felírt sorozatok közül véges sok kivételével mindegyikben a k-adik helyen áll, akkor azt mondjuk, hogy a k-adik hely az n szám *törzshelye*.

Először azt látjuk be, hogy ha valamely n szám csak véges sokszor (esetleg 0-szor) kerül az első helyre, akkor ennek az n számnak van törzshelye. Ekkor ugyanis van olyan m szám, hogy az m-edik sorozattól kezdve n nem szerepel első elemként. Minthogy a későbbiekben n nem kerül az első helyre, így hátrafelé sem léptethetjük. Tehát csak előre léphet, s mivel nem éri el az első helyet, véges sok lépés után eljut egy olyan helyre, ahonnan többé sem hátra, sem előre nem mozdul. Ez a hely n-nek a törzshelye lesz.

Ezek után beláthatjuk, hogy egyetlen hely sem lehet törzshely. Ebből a bizonyítani kívánt állításunk már következik, hiszen épp most láttuk, hogy ha volna olyan n természetes szám az első sorozatban, amely csak véges sokszor szerepel első elemként, akkor n-nek volna törzshelye. Tegyük fel, hogy van törzshely. Megmutatjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet. Ha van törzshely, akkor nyilván van egy legkisebb j szám, amelyre a j-edik hely törzshely. Legyen az m-edik sorozat az, amelyben a j-edik helyen álló szám végleg elfoglalja törzshelyét. Ez a sorozat tehát így kezdődik: $a_1 \ldots, a_{j-1} a_j \ldots$ és a_j többé nem mozdul a j-edik helyről.

Legyen a_i a legnagyobb az $a_1, \ldots,\ a_{j-1}$ számok közül. Mivel $a_1,\ \ldots,\ a_{j-1}$ páronként különböző természetes számok, így $a_i \geqq j-1$. Másrészt $i<j$, így az 1., 2., $\ldots$, i. helyek egyike sem törzshely, tehát a_i előbb-utóbb elmozdul az i-edik helyről előbb az $(i-1)$-edikre, majd az $(i-2)$-edikre, végül eljut az első helyre is. Amikor a_i az első helyre kerül, a sorozat eleje $a_i b_2 b_3 \ldots b_{j-1} a_j$ alakú. A következő lépésben a_i az (a_i+1)-edik helyre kerül. De $a_i+1 \geqq j$, így az első helyre b_2, a másodikra b_3 stb., a $(j-2)$-edik helyre b_{j-1} és a $(j-1)$-edik helyre a j kerül. Ez azonban ellentmond annak, hogy a j-edik hely a j törzshelye.

Beláttuk tehát, hogy feltevésünk ellentmondáshoz vezet, s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.