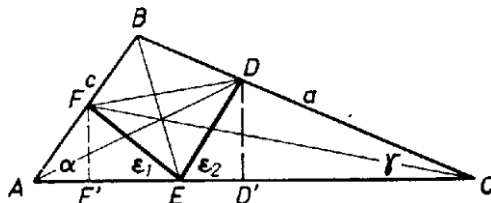


Az előírás $DFE \sphericalangle = DEF \sphericalangle$ következményéből indulunk ki. Legyen D vetülete AC -re D' és $DEC \sphericalangle = \varepsilon_2$. A szögfelező osztásaránya alapján a szokásos jelölésekkel

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_2 &= \frac{DD'}{ED'} = \frac{CD \sin \gamma}{CE - CD \cos \gamma} = \frac{\frac{ab}{b+c} \sin \gamma}{\frac{ab}{a+c} - \frac{ab}{b+c} \cos \gamma} = \\ &= \frac{a \sin \gamma + c \sin \gamma}{c(1 - \cos \gamma) + (b - a \cos \gamma)} = \frac{c(\sin \alpha + \sin \gamma)}{c(1 - \cos \gamma + \cos \alpha)}. \end{aligned}$$



Átvetűzéssel az $FEA \sphericalangle = \varepsilon_1$ szögre

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{1 - \cos \alpha + \cos \gamma},$$

további alakításokkal

$$\operatorname{tg} DEF \sphericalangle = -\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\cos \beta + \frac{1}{2}},$$

és átvetűzéssel

$$(1) \quad \operatorname{tg} DEF \sphericalangle = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \gamma + \frac{1}{2}}.$$

Innen is kiadódik a 2239. feladat¹ állítása: $\gamma = 120^\circ$ esetén $FD \perp FE$. Nem okozhat zavart – mert csak elfajult háromszögre vezethetne – valamelyik nevező eltűnése, amikor e két kifejezés egyenlőségét követeljük:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\cos \beta + \frac{1}{2}} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \gamma + \frac{1}{2}}.$$

Ha ez teljesül, akkor az

$$(2) \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{u} \Leftrightarrow \frac{x-z}{y-u} = \frac{x}{y}$$

azonosság alapján

$$\operatorname{tg} DEF \sphericalangle = \frac{\sin \gamma - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \gamma} = \operatorname{ctg} \frac{\beta + \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Eszerint a vizsgált háromszögekben

$$DEF \sphericalangle = DFE \sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{EDF \sphericalangle}{2}, \quad \operatorname{tg} EDF \sphericalangle = -\operatorname{tg} \alpha,$$

(vagyis a DEF háromszög köré írt kör átmegy A -n), és felírva $\operatorname{tg} EDF$ (1) szerinti kifejezését

$$\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \frac{1}{2}} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right),$$

majd ismét (2)-t alkalmazva

$$(3) \quad \sin \beta + \sin \gamma + \sin \alpha = -\frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

¹K. M. L. 60 (1980) 206. oldal (1980. május).

Ennyit tüstént kiolvashatunk innen: $\alpha > \pi/2$. A bal oldalon $a < b + c$ alapján

$$\sin \alpha < \sin \beta + \sin \gamma < 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

(ugyanis $\beta = \gamma$ eleve kizárt). Így (3)-ból

$$2 \sin \alpha < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = -\frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} < \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right),$$

és szorozva a következő kifejezéssel

$$-\frac{2 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{\sin \alpha}, \quad (> 0),$$

valamint bevezetve a

$$\sin \frac{\alpha}{2} = z$$

rövidítést:

$$4z(2z^2 - 1) < z < 2(z + 1)(2z^2 - 1).$$

Az egyenlőtlenség-lánc első feléből $z > 0$ alapján

$$(4) \quad 0 < z < \sqrt{\frac{5}{8}} = 0,790\,569\,4,$$

a második feléből pedig

$$f(z) = 4z^3 + 4z^2 - 3z - 2 > 0.$$

f -nek maximuma van egy negatív helyen és minimuma $(-2 + \sqrt{13})/6$ -nál ($z = 0,27$ körül), továbbá $f(0) < 0$ és $f(\sqrt{5/8}) = 0,105 > 0$. Így egyetlen pozitív zérushelye van, és az megfelel (4)-nek.

Kis kalkulátorral közelítve f a $z = 0,780\,7764$ és $0,780\,776\,41$ helyek közt válik pozitívvá (értéke $-7 \cdot 10^{-8}$, ill. $+4 \cdot 10^{-8}$). Eszerint

$$0,780\,776\,41 < \sin \frac{\alpha}{2} < 0,790\,569\,4,$$

másképpen

$$(5) \quad \begin{aligned} 102,663\,43^\circ &< \alpha < 104,4775^\circ, \\ 102^\circ 39' 48,4'' &< \alpha < 104^\circ 28' 39'' \end{aligned}$$

elegendő feltétel ahhoz, hogy a DEF háromszög egyenlő szárú legyen.

Itt választott α -hoz a további szögek a $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ és (3) rendszerből kiszámíthatók.

Megemlítjük, hogy a szűk (5) intervallumba belesik az F. 2264-ben vizsgált $\alpha = 4\pi/7 = 102^\circ 51' 25,7''$ érték. ¹

A problémát *G. Parry* oldotta meg a *The Mathematical Gazette* c. folyóirat 420. számában (1978. június).

B. T.

¹Lásd a megoldást K. M. L. 61 (1980). 137. o.