Jelöljük $\varphi(n)$-nel az n-hez relatív prím, n-nél kisebb természetes számok számát, $\sigma(n)$-nel pedig n osztóinak összegét. Határozzuk meg mindazokat a k kitevőket, amelyekre

$$\varphi\left(\sigma(2^k)\right) = 2^k \tag{1}$$

teljesül. $\big($*Könnyítésül eláruljuk, hogy* 641 *osztója* $(2^{32}+1)$ *-nek.*

Megoldás. Legyen n prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, ahol $p_1,\ p_2, \ldots, p_s$ különböző prímszámok, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ pedig pozitív egészek. Ekkor

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s-1}(p_s-1) \tag{2}$$

(lásd pl. Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 490. o.). Ha most n páratlan és $\varphi(n) = 2^k$, akkor (2) csak úgy állhat fenn, ha egyrészt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_s = \ldots = 1$ (mivel p_i páratlan), másrészt $p_i - 1 = 2^{\beta_i}$ valamilyen pozitív egész β_i-vel. Tudjuk, hogy $2^{\beta_i}+1$ csak úgy lehet prímszám, ha β_i maga is kettőhatvány, az ilyen alakú számokat Fermat-féle prímeknek nevezzük. Azt kaptuk tehát, hogy

$$n = (2^{\beta_1}+1)(2^{\beta_2}+1)\ldots(2^{\beta_s}+1), \tag{3}$$

ahol $\beta_i = 2^{\gamma_i},\ 0 \leqq \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s$, valamint $2^{\beta_i}+1$ prímszám. (3)-ban a szorzást elvégezve

$$n = 1 + 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + 2^{\beta_1+\beta_2} + \ldots + 2^{\beta_s} + 2^{\beta_s+\beta_1} + \ldots + 2^{\beta_s+\ldots+\beta_1}. \tag{4}$$

Itt összesen 2^s tag szerepel, s mivel a β_i-k különböző kettőhatványok, azért a kitevőben álló számok mind különbözők. Ez azt jelenti, hogy n kettes számrendszerbeli alakjában hátulról számított 0-ik, β_1-edik, β_2-edik, $\ldots$ $(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_s)$-edik helyén áll 1-es, a többi helyen nulla.

Térjünk most vissza az (1) összefüggéshez. Mivel 2^k osztói $1,\ 2,\ 2^2, \ldots, 2^k$, ezért

$$n = \sigma(2^k) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k$$

páratlan szám, melynek kettes számrendszerbeli alakjában az utolsó $k+1$ helyen 1-es áll. Ezért $\varphi(n) = 2^k$ csak úgy állhat fönn, ha n egyúttal a (4) alatti alakban is írható. S mivel egy számot kettes számrendszerben csak egyféleképpen lehet felírni, ez azt jelenti, hogy a $\beta_1 < \beta_2 < \beta_1+\beta_2 < \ldots \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_s$ számoknak meg kell egyezniük az 1, $2,\ldots, k$ számokkal. Ez pedig, mivel β_i kettőhatvány, csak akkor lehetséges, ha $\beta_1 = 2^0,\ \beta_2 = 2^1,\ \ldots,\ \beta_s = 2^{s-1}, \ldots$, és $k = 2^s - 1$. Ugyanakkor $2^{\beta_i}+1 = 2^{2^{i-1}}+1$-nek prímszámnak kell lennie minden $1 \leqq i \leqq s$-re. A feladathoz adott útmutatás szerint $2^{32}+1 = 2^{2^5}+1$ nem prímszám, így csak az $s = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ és 5 esetek jönnek szóba, vagyis k szóba jövő értékei 1, 3, 7, 15 és 31. S mivel $2^{2^{i-1}}+1$ prímszám, ha $i \leqq 5$, azért k-nak ezek az értékei valóban teljesítik (1)-et.