

Legyen $COD\angle = \gamma$, $ACO\angle = \alpha$, $BCO\angle = \beta$, C vetülete az OD egyenesre, H . A CH , CA , ill. CB szakaszok hozzá elöljük h -val, a -val, ill. b -vel. Nyilván

$$h = r \sin \gamma, \quad a = CA_2 + r, \quad b = CB_2 + r.$$

Vezessük be az ún. polárkoordinátákat: a sík bármely P pontjához rendeljük hozzá a C ponttól való távolságát és azt a szöget, melyet úgy kapunk, hogy a CP félegyenest pozitív irányba elfordítjuk a CO félegyenestre. Ez a hozzárendelés egy-egyértelmű. A P pont polárkoordinátáit jelöljük ϱ -val ($= CP$) és Θ -val ($= OCP$ „pozitív irányú szög”). Könnyen látható, hogy

$$(1) \quad \varrho = 2r \cos \Theta$$

csak a kör,

$$(2) \quad \varrho = h / \sin(\gamma - \Theta)$$

csak az A_1B_1 egyenes és

$$(3) \quad \varrho = \frac{ab \sin(\alpha - \beta)}{a \sin(\alpha - \Theta) + b \sin(\Theta - \beta)}$$

csak az AB egyenes pontjaira érvényes. (1) és (2) triviális, (3)-nál a háromszög területére vonatkozó $t = \frac{1}{2}xy \sin \varphi$ összefüggést kell alkalmazni. A T pontra (2) és (3) teljesül, vagyis

$$\frac{h}{\sin(\gamma - \Theta)} = \frac{ab \sin(\alpha - \beta)}{a \sin(\alpha - \Theta) + b \sin(\Theta - \beta)}$$

igaz. Ebből

$$(4) \quad \frac{h}{\sin(\gamma - \Theta)} = \frac{ab \sin(\alpha - \beta)}{\cos \Theta(a \sin \alpha - b \sin \beta) + \sin \Theta(b \cos \beta - a \cos \alpha)}$$

Célunk $\delta = 2\gamma/3 - \Theta$ vizsgálata, ez jellemző ugyanis a szögharmadolás pontosságára.

Vezessük be az m, p, n, q új változókat a következő módon:

$$(5) \quad m = \frac{ab \sin(\alpha - \beta)}{r^2}, \quad n = m \operatorname{ctg} \gamma, \quad p = \frac{b \sin \beta - a \sin \alpha}{r}, \quad q = \frac{b \cos \beta - a \cos \alpha}{r}.$$

Ekkor

$$(6) \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{m + p}{n + q}.$$

Az a, b, α, β értékek γ -val és r -rel kifejezhetők, így (5), majd (6) segítségével ugyanez igaz Θ -ra is.

Ugyanis(1)-ből

$$(7a) \quad a = 2r \cos \alpha + r = r(1 + 2 \cos \alpha),$$

$$b = 2r \cos \beta + r = r(1 + 2 \cos \beta).$$

A COA_1 és COB_1 háromszögekre alkalmazva a sinustételt a

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin(\gamma - \alpha) \\ \sin \beta &= 5/3 \sin(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk. Ezekből

$$(7b) \quad \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \sin \gamma}{P}; & \cos \alpha &= \frac{1 + 2 \cos \gamma}{P}; \\ \sin \beta &= \frac{5 \sin \gamma}{Q}; & \cos \beta &= \frac{3 + 5 \cos \gamma}{Q}; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\sin \gamma}{P \cdot Q} \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk, ahol

$$P^2 = 5 + 4 \cos \gamma \quad \text{és} \quad Q^2 = 34 + 30 \cos \gamma.$$

Adott γ esetén Θ (s így δ) kiszámítása tehát a következőképpen történhet:

1. (7b)-ből kiszámítjuk a $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\sin(\alpha - \beta)$ értékeket,
2. ezek után (7a)-ból a és b számítható,
3. végül (5) segítségével m , p , n , q , majd (6)-ból Θ kifejezhető.

A $\gamma_i = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{100}$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) értékekre δ_i -t kiszámolva a következőket kapjuk (négy tizedesjegy pontossággal):

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 0,0157, \gamma_2, \dots, \gamma_{52} = 1,6336 \text{ esetén } \delta &= 0 \\ \gamma_{53}, \gamma_{54} \dots, \gamma_{65} \text{ esetén } \delta &= 0,0001 \text{ (radián)} \\ \gamma_{66}, \gamma_{67} \dots, \gamma_{73} \text{ esetén } \delta &= 0,0002 \\ \gamma_{74}, \gamma_{75} \dots, \gamma_{80} \text{ esetén } \delta &= 0,0003 \approx 0^\circ 1' \\ \gamma_{81}, \gamma_{82} \dots, \gamma_{85} \text{ esetén } \delta &= 0,0004 \\ \gamma_{86}, \gamma_{87} \dots, \gamma_{92} \text{ esetén } \delta &= 0,0005 \\ \gamma_{93}, \gamma_{94} \dots, \gamma_{100} = \frac{\pi}{2} \text{ esetén } \delta &= 0,0006 \end{aligned}$$

Azt tapasztaljuk tehát, hogyha γ nő, úgy δ is nő. Mivel $\gamma = \frac{\pi}{2}$ esetén $\delta = 0,0006$, ezért hegyesszög esetén azt találjuk, hogy $\delta \leq 0,0006$.

G. C. Mohanty, India

Megjegyzés. 1. A megoldás utolsó lépésében nem „bizonyítottunk”, hanem egyszerű számítástechnikai módon kiszámoltuk: adott γ -hoz mekkora δ tartozik.

2. A feladatra nem érkezett megoldás.