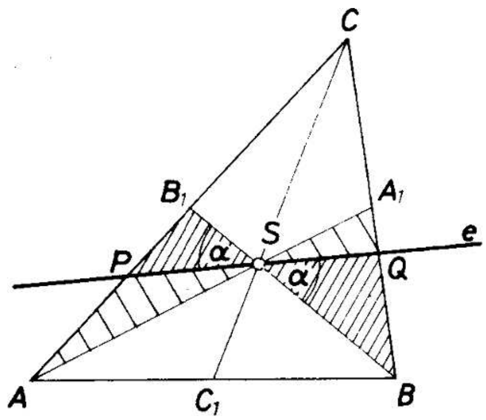
Ismeretes, hogy a háromszöget bármelyik súlyvonalának egyenese két egyenlő területű részre osztja. Vajon van-e a súlyvonal egyeneseken kívül más olyan, a súlyponton áthaladó egyenes, amelyre ugyanez igaz?

Indirekt módon bebizonyítjuk, hogy nincs.



Tegyük fel, hogy egy, az ABC háromszög S súlypontján átmenő e egyenes, amely egyik csúcson sem halad át, a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Ebből a feltevésből fogunk ellentmondásra jutni. Jelölje az e egyenesnek az AC, ill. BC oldalakkal alkotott metszéspontját P, ill. Q, ugyanezen oldalak felezőpontját B_1, ill. A_1.

A területfelezési tulajdonságból következik, hogy $PSB_1 = QSB$. (Valamely $XYZU\ldots$ sokszög területét is $XYZU$-val jelöljük.) Ugyanis egyrészt $AB_1B = BB_1C$, másrészt $CPQ = QPAB$. Ezekből az

$$APSB + PB_1S = CB_1SQ + QSB \text{ és}$$
$$CB_1SQ + PB_1S = APSB + QSB$$

egyenlőségeket kapjuk. Ezek összeadásával $PB_1S = QSB$, amint azt állítottuk.

Ez utóbbiból a jól ismert területképlet felhasználásával az

$$\frac{SB_1 \cdot PS \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{SQ \cdot SB \cdot \sin\alpha}{2}$$

összefüggéshez jutunk ($\alpha = B_1SP\sphericalangle$).

Ebből, mivel $BS = 2B_1S$, következik, hogy $PS = 2SQ$. De $AS = 2A_1S$ is igaz, s ezért az ASP és A_1SQ háromszögek hasonlók, hiszen két oldal arányában és a közbezárt szögben megegyeznek. Ebből a hasonlóságból $AP \parallel A_1Q$ következik, ez pedig ellentmondás.

Az e Euler-egyenes átmegy a súlyponton, magasságponton és a körülírt kör középpontján. Az előbb bizonyítottak miatt e egybeesik valamelyik súlyvonal egyenesével, mondjuk CS-sel. Az M magasságpontra két eset lehetséges:

1. $M \equiv C$, akkor a háromszög derékszögű, s a körülírt kör középpontja egybeesik C_1-gyel.

2. Ha $M \not\equiv C$, akkor, mivel $CM \perp AB$ és CM egyenese a súlyvonal egyenese, $AC = BC$, azaz a háromszög egyenlő szárú.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy ezek és csak ezek a háromszögek rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal.

Szabó 457 László (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.)