

I. megoldás. Minden x valós számhoz rendeljük azt az n egész számot, amelyre $(x+n\sqrt{2})$ racionális, és rendeljük hozzá $\frac{1}{2}$ -et, ha nincs ilyen n egész. Megmutatjuk, hogy ez a hozzárendelés egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely x számhoz van két különböző n_1 és n_2 egész úgy, hogy

$$x + n_1\sqrt{2} = r_1 \quad \text{és} \quad x + n_2\sqrt{2} = r_2,$$

ahol r_1 és r_2 racionális számok, n_1 és n_2 különböző egészek. Ekkor

$$\sqrt{2} = \frac{r_1 - r_2}{n_1 - n_2}$$

adódik, ami nem lehet, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

A megadott hozzárendelés tehát függvény. Megmutatjuk, hogy ennek az f függvénynek minden pozitív racionális szám periódusa. Ha $f(x) = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), akkor

$$x + n\sqrt{2} = r_1,$$

ahol r_1 racionális. Legyen ε egy tetszőleges pozitív racionális szám! Ekkor $x + \varepsilon + n\sqrt{2} = r_1 + \varepsilon = r_2$ racionális szám, tehát

$$f(x) = f(x + \varepsilon) = n.$$

Ha $f(x) = \frac{1}{2}$, ez azt jelenti, hogy tetszőleges n egészre $x + n\sqrt{2}$ irracionális. Ebből következik, hogy ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges racionális szám, akkor $x + \varepsilon + n\sqrt{2}$ is irracionális bármely n -re, tehát

$$f(x) = f(x + \varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

Az $f(x)$ függvény minden n egész értéket felvesz az $x = r_1 - n\sqrt{2}$ helyen (ahol r_1 racionális szám), tehát végtelen sok értékű, továbbá minden pozitív racionális ε periódusa, és ez nyilván tetszőlegesen kicsi lehet.

Varga József (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen x tetszőleges valós szám és $f(x) = i$, ha x tízes számrendszerbeli alakjában a tizedesvessző utáni i -edik számjegy páratlan és az utána következők mind párosak; és legyen $f(x) = -1$, ha ilyen számjegy nincs. Például $f(1) = -1$, $f(1, 1) = 1$, $f(1, 2176) = 3$. Az f függvény értékkészletéhez minden pozitív egész szám hozzátartozik, és azt is könnyű látni, hogy ha n pozitív egész, akkor a függvénynek $2 \cdot 10^{-n}$ periódusa.

Boros Tamás (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t.)