

**I. megoldás.** Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy  $A = 0$ . Tekintsük az

$$(1) \quad \begin{aligned} ay_1 + a^2y_2 + a^3y_3 + \dots + a^ny_n &= 0 \\ a^2y_1 + a^4y_2 + a^6y_3 + \dots + a^{2n}y_n &= 0 \\ a^3y_1 + a^6y_2 + a^9y_3 + \dots + a^{3n}y_n &= 0 \\ \vdots & \\ a^ly_1 + a^{2l}y_2 + a^{3l}y_3 + \dots + a^{nl}y_n &= 0 \\ \vdots & \\ a^ny_1 + a^{2n}y_2 + a^{3n}y_3 + \dots + a^{n^2}y_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek a determinánsa éppen az  $A$  determináns. Ismeretes, hogy  $A$  akkor és csak akkor 0, ha a felírt egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, azaz ha léteznek olyan  $y_1, y_2, \dots, y_n$  számok, melyek (1)-et kielégítik, és nem mindegyikük nulla. Ez ugyanakkor azt is jelenti, hogy a

$$P(x) = y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + \dots + y_nx^n = 0$$

polinomnak az  $a, a^2, \dots, a^n$  számok, vagyis  $n$  db különböző szám gyöke ( $a^i \neq a^j$ , ha  $a \neq 0$  és  $a \neq \pm 1$ ). Mivel a  $P(x)$  polinom  $x(y_1 + y_2x + \dots + y_nx^{n-1})$  alakba írható és  $a^i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ezért azt kapjuk, hogy a legfeljebb  $(n-1)$ -ed fokú  $(y_1 + y_2x + \dots + y_nx^{n-1})$  polinomnak  $n$  különböző gyöke van. (Ez azonban nem lehet, ezért  $A \neq 0$ ).

*Lukács Erzsébet* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen  $A_i = a^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ekkor a vizsgált determináns az

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_1^2 & A_1^3 & \dots & A_1^n \\ A_2 & A_2^2 & A_2^3 & \dots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & A_n^2 & A_n^3 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

alakot ölti.

Leosztva a 0-tól különböző  $A_1A_2 \dots A_n$  értékkel, a következőt kapjuk:

$$A = A_1A_2 \dots A_n \begin{vmatrix} 1 & A_1 & \dots & A_1^{n-1} \\ 1 & A_2 & \dots & A_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & A_n & \dots & A_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ez egy ún. Vandermonde-féle determináns, így  $A$  értéke:

$$(2) \quad A = A_1A_2 \dots A_n \prod_{1 \leq i < k \leq n} (A_k - A_i).$$

Mivel  $A_i = a^i$  ezért ha  $i \neq k$ , akkor

$$A_k - A_i = a^k - a^i \neq 0, \quad \text{ha} \quad a \neq 0, +1, -1.$$

így a (2) alatti szorzat, azaz  $A$  sem lehet nulla.

*Erdélyi Tamás* (Budapest, Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.*  $a$ -ról mindkét megoldásban csak annyit használtunk ki, hogy  $-1$ -től,  $1$ -től és  $0$ -tól különböző valós szám.