

A bizonyításhoz felhasználjuk Lagrange tételét (Ld. pl. Molnár Emil: Matematikai versenyek 523. old.):

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos, az (a, b) nyílt intervallumban differenciálható, akkor van legalább egy olyan c hely, melyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < c < b).$$

Legyen most $k = a + \frac{b-a}{6} = \frac{5a+b}{6}$. Nyilván $\frac{6a}{6} = a < \frac{5a+b}{6} < \frac{6b}{6} = b$, hiszen $a < b$. Írjuk fel Lagrange tételét az $[a, k]$ és a $[k, b]$ zárt intervallumokra; ezt megtehetjük, mivel a tétel feltételei teljesülnek.

Ekkor alkalmas c_1 -re és c_2 -re:

$$a < c_1 < k, \quad f'(c_1) = \frac{f(k) - f(a)}{k - a}$$

és

$$k < c_2 < b, \quad f'(c_2) = \frac{f(b) - f(k)}{b - k}.$$

Itt $c_1 \neq c_2$, mert $c_1 < k < c_2$, továbbá c_1 is és c_2 is az (a, b) nyílt intervallumban fekszenek, így a két különböző c_1 és c_2 helyre: $a < c_1 < k < c_2 < b$. Továbbá k megválasztása miatt

$$f'(c_1) + 5f'(c_2) = \frac{f(k) - f(a)}{k - a} + 5\frac{f(b) - f(k)}{b - k} = \frac{6(f(b) - f(a))}{b - a} = 0,$$

mivel $f(a) = f(b)$.

Így $x = c_1$ és $y = c_2$ ($c_1 \neq c_2$) választások megfelelőek. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Hasonló feltételek mellett – megfelelő k érték megválasztásával – az

$$\alpha f'(x) + \beta f'(y) = 0$$

egyenletre is találhatunk megoldást ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ valós számok $a < x < y < b$).

Erdélyi Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)