

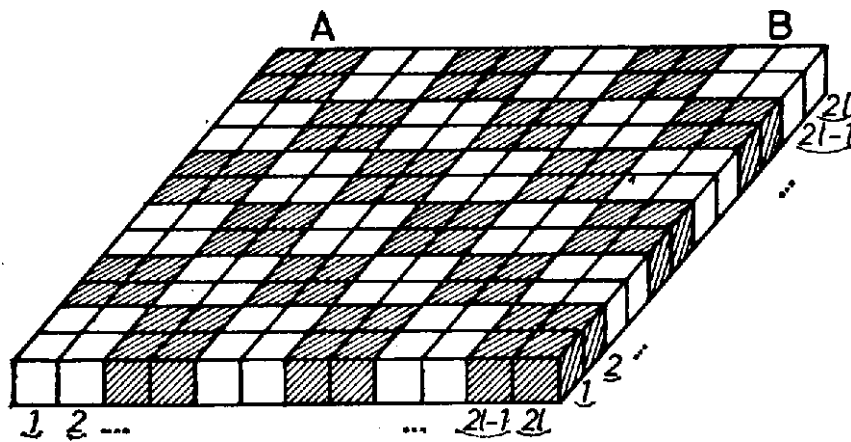
1. Először belátjuk, hogy ha létezik a kívánt színezés, akkor k csak páros lehet.

Vegyünk fel egy térbeli koordináta-rendszert, melyben az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ alapvektorok a kis kockák egy-egy élével párhuzamosak. Mindegyik kocka középpontjából indítsunk vektorokat a vele szomszédos és azonos színű kockák középpontjaiba. Ezen vektorok mindegyike nyilván az alapvektorok valamelyikével vagy ellentettjével egyenlő. Ha az O_1 kockaközéppontból indítottunk vektort az O_2 kockaközéppontba, akkor O_2 -ből is indítottunk O_1 -be. Ezért nyilvánvaló, hogy a k^3 db vektor összege nullvektor. Jelölje rendre $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ azon kis kockák számát ($a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = k^3$), amelyek középpontjaiból rendre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$ vektort indítottunk. A mondottak miatt:

$$a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + b_1(-\mathbf{i}) + b_2(-\mathbf{j}) + b_3(-\mathbf{k}) = \mathbf{0}, \text{ azaz} \\ (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy ez akkor és csak akkor lehet, ha $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ és $a_3 = b_3$. Ez azt jelenti, hogy $k^3 = 2(a_1 + a_2 + a_3)$, vagyis k^3 páros, s így k is páros. Ezt akartuk belátni.

3. Most páros k -ra megadunk egy lehetséges színezést. Legyen $k = 2l$. Vegyünk $2l$ db-ot az alábbi $2l \times 2l \times 1$ hasázból. A hasáb kockáit az ábrán látható módon színezzük ki.



Ily módon egy kockának pontosan két vele azonos szomszédja lesz. Ezeket a négyzet alapú hasábokat helyezzük fokozatosan egymásra úgy, hogy A -val jelzett fölé B -vel jelzett, B -vel jelzett fölé A -val jelzett kerüljön. Ez az elhelyezési mód azt biztosítja, hogy bármely kocka felett és alatt ellenkező színű kocka lesz. Ezt a hasábról mondottakkal egybevetve következik, hogy jó színezést kaptunk.

Knébel István (Budapest, József A. Gimn.)