

A korábban közölt megoldásnak (KÖMAL 1978/8–9., 153–155. oldal) az $\alpha \geq 1$ esettel foglalkozó része lényegében helyes. A $0 < \alpha < 1$ esetben az még igaz, hogy α_{2k} monoton nő és α_{2k+1} monoton fogy (bár ennek bizonyításába is hiba – talán sajtóhiba – csúszott, hiszen most α_0 nem nagyobb α_1 -nél, hanem csakúgy, mint az α_{2k} részsorozat minden tagja, kisebb α_1 -nél is, és az α_{2k+1} részsorozat minden más tagjánál is). Ebből azonban – még ha azt is felhasználjuk, hogy a sorozat korlátos – csak annyi következik, hogy az α_{2k} részsorozat is konvergens és az α_{2k+1} részsorozat is konvergens, az azonban nem biztos, hogy a két sorozat határértéke megegyezik. Most ugyanis csak annyit tudunk a két részsorozat határértékéről a képzési szabály alapján, hogy ha őket rendre β -val, γ -val jelöljük, akkor gyökei a

$$(1) \quad \beta = f(\gamma), \quad \gamma = f(\beta)$$

egyenletrendszernek, ahol $f(x)$ most is az α^x függvényt jelöli. Amennyiben (1)-nek több gyökpárja van, azokra egyrészt nyilván $0 < \beta, \gamma < 1$ teljesül, másrészt a β, γ határértékekről még azt is tudjuk, hogy $\beta \leq \gamma$ épp az előbb említett $\alpha_{2k} < \alpha_{2k+1}$ összefüggés miatt. A megoldás első felében alkalmazott megfontoláshoz hasonlóan az is belátható, hogy az (1) gyökpárjai közül a (β, γ) az, amelyben β a legkisebb, és ennek megfelelően γ a legnagyobb.

Azt kell tehát megvizsgálnunk, van-e (1)-nek olyan gyökpárja, amelyben $\beta < \gamma$. Jelöljük f inverzét φ -vel: $\varphi(x) = \log_{\alpha} x$. Mivel (1) első egyenlete alapján $\gamma = \varphi(\beta)$ az

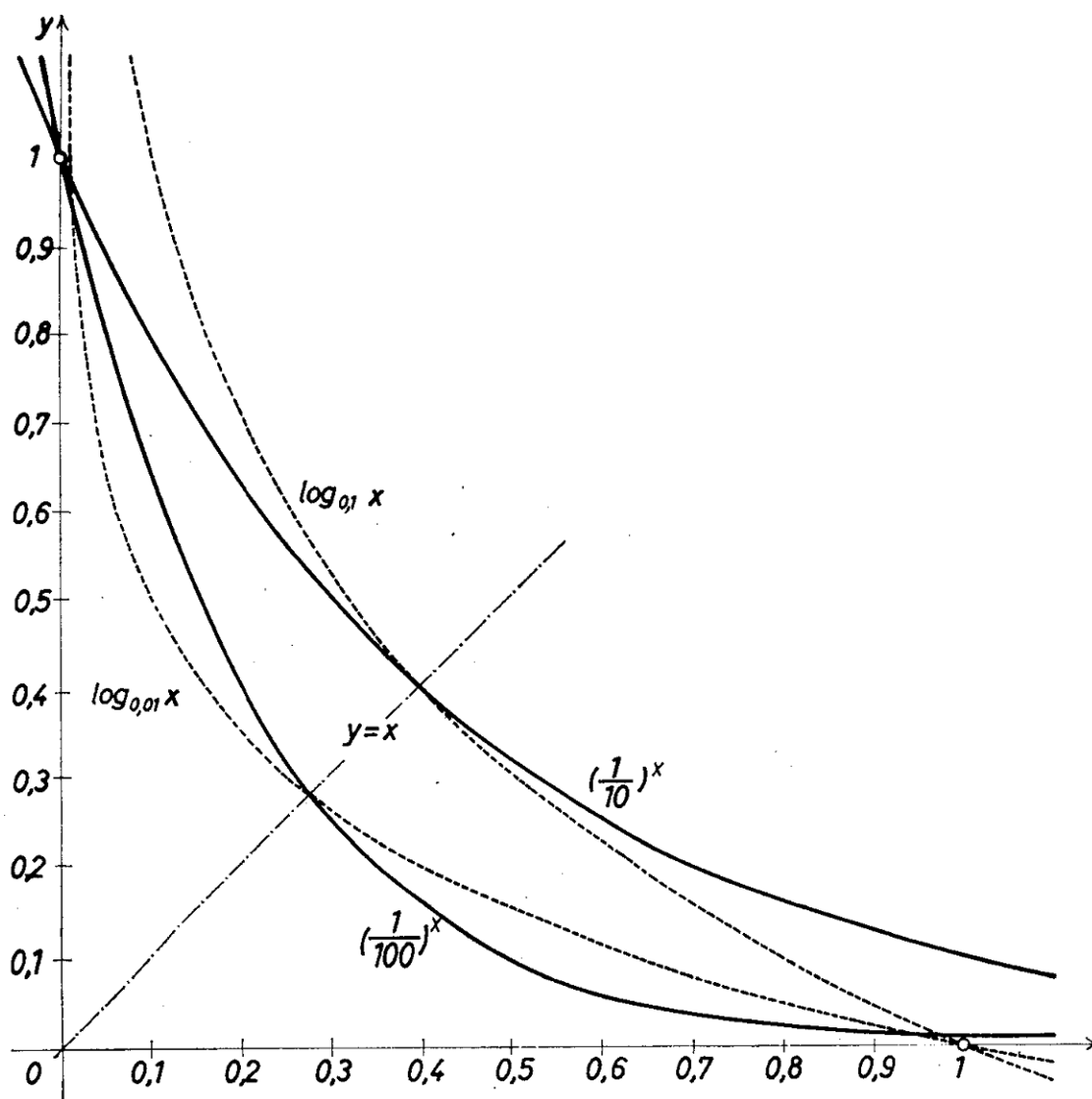
$$(2) \quad f(x) - \varphi(x) = 0$$

egyenlet legkisebb gyöke, ennek az egyenletnek biztosan gyöke az

$$(3a) \quad f(x) = x,$$

$$(3b) \quad \varphi(x) = x$$

egyenletek egyetlen közös x_0 gyöke, a kérdés csak az, hogy itt az f, φ függvények képei milyen irányban metszik át egymást.



Ha ugyanis $f'(x_0) - \varphi'(x_0) < 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - \varphi(x)] = -\infty$$

miatt (2)-nek biztosan létezik x_0 -nál kisebb gyöke. Másrészt mivel $f'(x) = f(x) \cdot \log_e \alpha$ és $\varphi'(x_0) = 1/f'(x_0)$, azért $f'(x_0) - \varphi'(x_0) \geq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x_0 \log_e \alpha \geq -1$, vagyis

$$e^{x_0 \log_e \alpha} = \alpha^{x_0} = x_0 \geq e^{-1}, \quad \log_e \alpha \geq -\frac{1}{x_0} \geq -e, \text{ ahonnan } \alpha \geq 1/e^e.$$

Ebben az esetben az $f(x) - \varphi(x)$ függvény $x > 0$ -ra szigorúan monoton nő, hiszen deriváltjának x -szere

$$x(f'(x) - \varphi'(x)) = x \cdot f(x) \cdot \log_e \alpha - \frac{1}{\log_e \alpha} \geq -\frac{1}{e} - \frac{1}{\log_e \alpha} \geq 0,$$

tehát (2)-nek legfeljebb egy gyöke lehet.

Összefoglalva, a vizsgált sorozat csak akkor konvergens, ha

$$1/e^e \leq \alpha \leq e^{1/e},$$

ha viszont $0 < \alpha < 1/e^e$, akkor az α_{2k} , α_{2k+1} részsorozatok ugyan konvergensek, de határértékük különböző.

Magyar Zoltán levele alapján