

I. megoldás. Az első másodperc végén a köté 2000 cm lesz, és a csiga ezalatt 1 cm-t tesz meg, tehát 1 másodperc múlva a kiindulási ponttól legalább 1 cm-re van. Így a csiga a 10 m-nek legalább az $1/2000$ részét teszi meg az első másodperc végéig. Hasonlóan: a k . másodperc végén a köté hossza $(k+1) \cdot 1000$ cm; és a csiga attól a ponttól, ahol a másodperc kezdetén volt, legalább 1 cm-re van, így a csiga a k . másodpercben a 10 m-nek legalább az $1/(k+1)$ 1000-ed részét teszi meg. Ezért az n . másodperc végéig a csiga a kötének legalább $1/2000 + 1/3000 + \dots + 1/(n+1)$ 1000-ed részét teszi meg. Vagyis ha

$$(1) \quad 1/2 + 1/3 + \dots + 1/(n+1) > 1000$$

egy alkalmas n -re, akkor a csiga a gonosz manó ügködése ellenére B -be ér. Az (1) pedig teljesül, mert mint ismeretes, tetszőleges nagy K számhoz található olyan n , hogy

$$1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$$

nagyobb, mint K .

II. megoldás. Legyen $S(t)$ cm a csiga távolsága B -től t idő múltán. Nyilván $S(0) = 1000$, és amikor a csiga a gumikötél B végpontjába ér, $S(t^*) = 0$. Legyen $v(t)$ a csiga sebessége a B ponthoz viszonyítva. Nyilván $v(0) = 999$, mert a manó sebessége 1000 cm/s, a csigáé pedig ellenkező irányban 1 cm/s.

Általában a csiga sebességére a t időpillanatban a következő egyenlőség érvényes:

$$(2) \quad v(t) = \frac{S(t)}{(t+1)1000} 1000 - 1 = \frac{S(t)}{t+1} - 1.$$

Ugyanis a t . pillanatban a köté hossza $(t+1)1000$, és ezen a csiga B -től számítva $S(t)$ -nyire van, tehát feltételezve a köté egyenletes megnyúlását, a manó 1000 cm/s sebessége miatt a csiga tartózkodási pontja $\frac{S(t)}{(t+1)1000} 1000$ cm/s sebességgel távolodik B -től, másrészt a csiga a kötéhez képest 1 cm/s sebességgel tart B felé. Legyen $a(t)$ a csiga gyorsulása t idő múlva. Használjuk fel a mozgásjellemzők fizikából ismert összefüggéseit. Mivel $\dot{v}(t) = a(t)$, $\dot{S}(t) = v(t)$, a (2) egyenlőség deriválásával

$$a(t) = \frac{v(t)(t+1) - S(t)}{(t+1)^2} = \frac{S(t) - (t+1) - S(t)}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1}.$$

A gyorsulás így rendelkezésünkre áll az idő függvényében, ebből integrálással határozhatjuk meg a sebességet: $v(t) = -\ln(t+1) + c$. Ahol a c konstans, a $v(0) = 999$ feltétel alapján 999, tehát

$$(3) \quad v(t) = -\ln(t+1) + 999.$$

Ebből (2) átrendezésével kapjuk, hogy

$$S(t) = (t+1)(-\ln(t+1) + 1000).$$

Láthatjuk, hogy a $t^* = e^{1000} - 1$ értékre $S(t^*) = 0$, vagyis a csiga $e^{1000} - 1 \approx 1,97 \cdot 10^{434}$ sec múlva eljut B -be.

(P. T.)