

I. megoldás. A keresett határértéket jelöljük H -val.

$$\text{Legyen} \quad u = \frac{x+1}{x+2}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{2u-1}{1-u} \quad (x \neq -2, u \neq 1).$$

H akkor és csak akkor létezik, ha $G = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{2u-1}{1-u} \left(\arctan u - \frac{\pi}{4} \right)$ létezik és ekkor nyilván $H = G$ (ez a függvények határ-

értékére vonatkozó tételekből következik). Azonban: $\lim_{u \rightarrow 1} (1-2u) = -1$ és $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\arctan u - \frac{\pi}{4}}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\arctan u - \arctan 1}{u-1}$. Ez utóbbi határérték azonban a differenciálhányados-függvény definíciója miatt:

$$(\arctan u)'_{u=1} = \left(\frac{1}{1+u^2} \right)_{u=1} = \frac{1}{2}.$$

Alkalmazva a szorzat határértékéről tanultakat, adódik, hogy $H = -\frac{1}{2}$.

Brindza Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn.)

II. megoldás. Könnyen látható, hogy

$$(1) \quad \arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy} \quad (xy \neq -1),$$

és

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

A keresett határérték kiszámítása ezek után a következőképpen történhet:

$$H = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \arctan 1 \right)$$

(1) miatt, ez tovább alakítható, s így (2) alapján:

$$\begin{aligned} H &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan \frac{-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{-1}{2x+3} \cdot \frac{\arctan \frac{-1}{2x+3}}{\frac{-1}{2x+3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2x+3} \cdot \frac{\arctan \frac{-1}{2x+3}}{\frac{-1}{2x+3}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2x+3} \right) \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \arctan y \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Gubics József (Székesfehérvár, Ságvári E. Szakközépisk.)

Megjegyzés. L'Hospital szabály segítségével is megoldható a feladat (de meg kell győződni alkalmazhatóságának feltételeiről!)