

A válasz: igen, ennek bizonyítására elegendő megadnunk egy megfelelő felosztást.

A halmaz: 1; 3, 4, 5, 6; 25, 26, 27, ..., 120; ...

B halmaz: 2; 7, 8, ..., 24; 121, 122, ..., 720, ...

A képzés módja: az A csoportba kerülnek azok az x természetes számok, melyekre $(2k)! + 1 \leq x \leq (2k+1)!$, a B csoportba pedig 2 és azon y számok, melyekre

$$(2k+1)! + 1 \leq y \leq (2k+2)! \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Nyilvánvaló, hogy így minden természetes szám pontosan egy csoportban szerepel.

Annak bizonyítására, hogy egyik csoport sem tartalmaz végtelen mértani sorozatot, induljunk ki egy tetszőlegesen megadott q hányadosú végtelen mértani sorozatból. Belátjuk, hogy található a sorozatnak két olyan tagja, hogy egyik A -ban, a másik B -ben van.

(Nyilván q természetes szám.) Legyen m a sorozat $(q+1)!$ -nál nagyobb elemei közül a legkisebb. Ilyen m biztosan létezik, mert $(q+1)!$ -nál kisebb természetes szám csak véges sok van. Jelölje n azt a (egyetlenegy!) természetes számot, amelyre

$$(1) \quad n! + 1 \leq m \leq (n+1)!$$

Ezért m definícióját figyelembe véve adódik, hogy

$$n \geq q+1.$$

Vizsgáljuk a sorozat $m, mq, mq^2, \dots$ tagjait. Mivel

$\lim_{k \rightarrow \infty} (mq^k) = +\infty$, létezik olyan k természetes szám, hogy

$$mq^{k-1} \leq (n+1)! < mq^k.$$

Viszont

$$mq^k = m \cdot q^{k-1} \cdot q \leq mq^{k-1} \cdot (n-1) < mq^{k-1} \cdot (n+2) \leq (n+1)! (n+2) = (n+2)!$$

Így $(n+1)! + 1 = mq^k \leq (n+2)!$ egyenlőtlenséghez jutottunk. Ez pedig, (1)-et figyelembe véve, azt jelenti, hogy a sorozat első tagja: m és mq^k nem lehet ugyanabban a csoportban, s így ellentmondásra jutottunk.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Legyen $a_1, a_2, \dots$ természetes számoknak egy olyan végtelen sorozata, melyre a_{n+1}/a_n szigorúan monoton növekedve $+\infty$ -hez tart. $A = \{x/x \text{ természetes szám és } a_{2n} \leq x \leq a_{2n+2}\}$ $B = \{x/x \text{ term. szám és } a_{2n-1} \leq x < a_{2n+1}\}$. Ekkor is megfelelő felosztást kapunk.

Balázs Iván József és Vékony György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

2. Jelölje X és Y a 2032. feladatnak eleget tevő halmazpárt. Legyen

$A = \{\text{azon természetes számok, melyek prímtényezős felbontásában a legnagyobb kitevő} \in X\}$

$B = \{\dots \in Y\}$

Ez a pár szintén megfelelő.

Sali Attila (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)