

$$(1) \quad \frac{3}{4}T > t > \frac{1}{2}T!$$

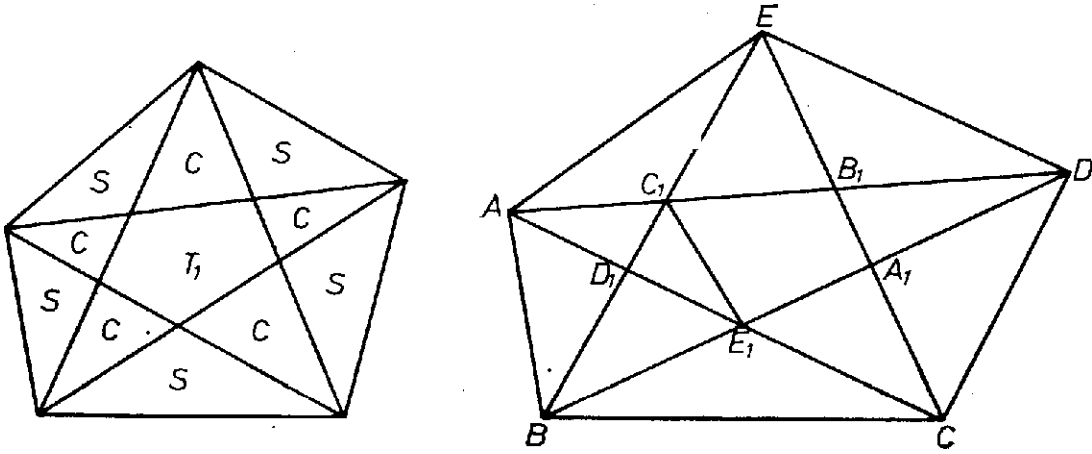
Egyszerűség kedvéért jelöljük a szóban forgó idomokat ugyanúgy, mint a területüket. Ha T -ből elhagyjuk a t ötszöget, öt háromszög marad vissza, jelöljük ezek együttesét h -val. Ha h minden háromszögét az ötszögével közös csúcsából kétszeresére nagyítjuk, új határvonaluk az ötszög egy-egy átlója lesz, és a szomszédos háromszögek egymásba fognak nyúlni. Jelöljük a nagyítás után kétszeresen fedett halmazt S -sel, az egyszeresen fedettet C -vel, és T -nek fedetlenül maradt részét T_1 -gyel. Mivel a kétszeres nagyításban a terület négyszeres, a fentiek szerint

$$4h = 2S + C,$$

és mivel $h = T - t$, $T = T_1 + S + C$, (1) bizonyításához elég belátni, hogy

$$(2) \quad T_1 < S$$

(hiszen T_1 , S , C mindegyike pozitív).



Rajzoljuk meg T_1 -ben is az átlókat, és a megfelelő részeket jelöljük rendre h_1 -gyel, S_1 -gyel, C_1 -gyel, T_2 -vel. Megmutatjuk, hogy

$$(3) \quad 4h_1 < S.$$

Jelöljük T , T_1 csúcsait rendre A, B, C, D, E -vel, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 -gyel. Mivel az AC_1 félegyenes metszi a BD egyenest, C_1 közelebb van BD -hez, mint A . Emiatt a BC_1E_1 háromszög területe kisebb, mint BAE_1 -é, és $C_1D_1E_1$ területe kisebb ABD_1 -énél. Ebből (3) már következik. (3)-ból viszont az következik, hogy

$$(4) \quad S - T_1 > 4h_1 - T_1 = S_1 - T_2.$$

Hasonlóan továbbmenve kapjuk, hogy

$$(5) \quad S - T_1 > S_n - T_{n+1}$$

teljesül tetszőleges n -re. Könnyű látni, hogy T_n tart 0-hoz, így $S_n < T_n$ miatt $S_n - T_{n+1}$ is, emiatt (5) csak akkor teljesülhet minden n -re, ha (2) igaz.