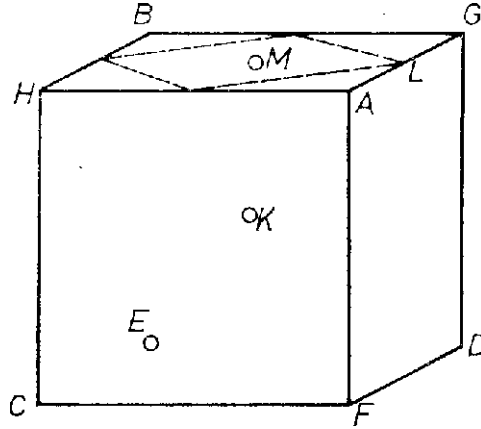


Jelöljük a tetraéder köré írt gömb középpontját K -val, K -nak a lapokon levő merőleges vetületét A, B, C, D -vel, ezeknek K -ra vonatkozó tükörképét E, F, G, H -val, egy tetszőleges S síkra merőleges, K -n átmenő egyenesnek az $AGBHFDCE$ kocka felületén levő pontjai legyenek P és Q . Legyen P mondjuk az $AGBH$ lapon, és jelöljük az AKP , BKP szögeket rendre α -val, β -val, az $AGBH$ négyzet oldalfelező pontjai által meghatározott négyzetet N -nel.



Könnyen látható, hogy a tetraéder S -en levő vetülete pontosan akkor négyszög, ha $P \in N$. Ekkor a vetület területe $\cos \alpha + \cos \beta$ (egységnek egy lap területét választva), ha pedig P N -en kívül van, és mondjuk A van hozzá legközelebb, akkor $\cos \alpha$. Ez utóbbi maximuma $P = A$, minimuma $P = L$ mellett van, ahol L az AG felezőpontja. (L helyett persze N bármely más csúcsát vehetnénk.)

Megmutatjuk, hogy a $\cos \alpha + \cos \beta$ összeg maximuma pedig az N négyzet M centrumában van, minimuma ismét L -ben. Mivel az M -beli érték nagyobb az A -belinél, ebből következik, hogy a keresett maximum (például) M -ben, minimum L -ben van.

Mivel

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2 \cos AKM,$$

a maximum valóban M -ben van. Az viszont, hogy a minimum L -ben van, abból következik, hogy a vizsgált függvény értéke – az ML egyenesen M -tól L felé haladva csökken – N belsejében, valamely HG -vel párhuzamos egyenesen AB -től távolodva csökken. Ez utóbbi állításunk azért igaz, mert az említett mozgás közben α is, β is nő. Ha pedig az ML egyenesen mozgunk, a vetület téglalap, amelynek a mozgás során az egyik oldala állandó, a másik fogy.