

I. megoldás. Jelöljük a vizsgálandó számot A -val. Az A végtelen tizedes törtben végtelen sok 0-tól különböző számjegy van, ugyanis minden prímszám első számjegye nem nulla. Tegyük fel, hogy A racionális. Ekkor $A = 0, a_1a_2 \dots a_kb_1b_2 \dots b_n$ (a_i, b_i a számjegyeket jelöli). Nem lehet mindegyik b_i nulla, mert ekkor A -ban csak véges sok nullától különböző számjegy lenne. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a $b_ib_{i+1} \dots b_nb_1 \dots b_{i-1}$ alakú sorozatokban biztosan van nullától különböző számjegy, s ezért az a_k után álló, bármely n egymás utáni számjegy között van nem nulla számjegy (nevezzük ezt a -tulajdonságnak). Viszont Dirichlet tételéből tudjuk, hogy a $10^{n+1} \cdot x + 1$ sorozat ($x = 1, 2, 3, \dots$) végtelen sok prímszámot tartalmaz,¹ e prímszámokban az utolsó jegy 1, előtte n db nulla van. Mivel ez végtelen sokszor megismétlődik, A -ban végtelen sokszor állhat n db 0 egymás után, ez pedig az a -tulajdonságnak ellentmond.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy ez a szám racionális. Ez azt jelentené, hogy a tizedes tört szakaszos lenne, azaz volna olyan k természetes szám, hogy a tizedestört alakban egy helytől kezdve k egymás utáni számjegy rendre megegyezne az utána következő k -val, és így tovább.

Csebisev tétele értelmében minden prímszám és a kétszerese között van prímszám. Ebből többek között az is következik, hogy bármely n természetes számra van legalább két db n -jegyű prímszám. Válasszuk n -et k többszörösére úgy, hogy két n -jegyű prímszám már a tizedes tört szakaszos részére essen. Ezt elég nagy többszörös esetén mindig megtehetjük.

A szakaszosság miatt az első prímszám minden számjegye, mivel n többszöröse k -nak, megismétlődik. Ez azt jelenti, hogy a két prímszám azonos jegyekből áll, azaz azonos. Ez nem lehet igaz, így az a feltevésünk, hogy a felírt tizedes tört racionális, helytelen. Tehát a számunk irracionális.

Hujter Mihály (Pápa, Türr I. Gimn., IV. o. t.)

¹Lásd *Erdős–Surányi*: Válogatott fejezetek a számelméletből és *Waclaw Sierpinsky*: 200 feladat az elemi számelméletből, Középisk. Szakk. Füzet.)