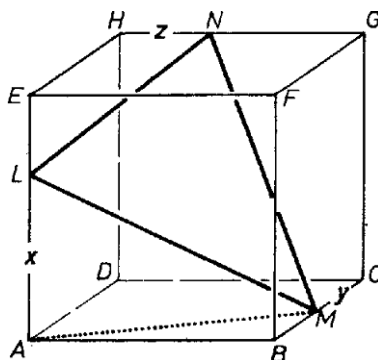


I. megoldás. Jelöljük az egységnyi élű $ABCDEFGH$ kocka AE , BC és GH kitérő éleinek egy-egy pontját rendre L , M , N -nel. Legyen $AL = x$, $CM = y$ és $HN = z$. Célunk, hogy meghatározzuk x , y , z mely értékeire lesz az LMN háromszög kerülete minimális.



Az oldalak hosszát Pitagorasz tétele segítségével fejezzük ki. Az ABM háromszögből $AM = \sqrt{1 + (1 - y)^2}$, az LAM háromszögből $LM = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2 + 1}$. Hasonlóan $MN = \sqrt{1 + y^2 + (1 - z)^2}$ és $NL = \sqrt{(1 - x)^2 + 1 + z^2}$. Jelöljük ezek összegét K -val. Némi átalakítás után K -t alulról becsülhetjük a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggés segítségével.

$$K = \sqrt{6} \left(\sqrt{\frac{x^2 + (1 - y)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{6}} + \sqrt{\frac{4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (1 - z)^2}{6}} + \sqrt{\frac{(1 - x)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + z^2}{6}} \right) \geq \sqrt{6} \left(\frac{x + (1 - y) + 4 \left(\frac{1}{2}\right)}{6} + \frac{4 \left(\frac{1}{2}\right) + y + (1 - z)}{6} + \frac{(1 - x) + 4 \left(\frac{1}{2}\right) + z}{6} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{6}.$$

Tehát $K \geq \frac{3}{2} \sqrt{6}$, és egyenlőség csak az $x = y = z = \frac{1}{2} = 1 - x = 1 - y = 1 - z$ esetben áll fenn, azaz ha az LMN háromszög csúcsai a megfelelő élek felezőpontjai.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

II. megoldás. Jelöljük a kitérő éleket p , q , r -rel, felezőpontjaikat P , Q , R -rel. Megmutatjuk, hogy a PQR háromszög kerülete minimális a vizsgált háromszögek között. Jelöljük a PQR háromszög síkját S -sel, és tükrözzük a kockát az r -en átmenő, S -re merőleges síkra. Mivel a kocka centruma benne van S -ben, az a sík, amire tükrözünk p -vel, q -val 45° -os szöget zár be. Emiatt p tükörképe benne marad a p -n átmenő, r -re merőleges lap síkjában, és merőleges p -re. Jelöljük ezt p_1 -gyel, q , P , Q tükörképét q_1 , P_1 , Q_1 -gyel. Mivel S merőleges a tükrözés síkjára, P_1 , Q_1 is benne lesz S -ben.

Hasonlóan tovább menve lépésről lépésre tükrözzünk a q_1 -en, p_2 -n, r_3 -on, q_4 -en átmenő, S -re merőleges síkokra, az $(i + 1)$ -edik tükrözés után p_i , q_i , r_i tükörképét p_{i+1} , q_{i+1} , r_{i+1} -gyel jelölve ($i = 1, 2, 3, 4$, r_1 azonos r -rel). Közben a P , R , Q_1 , P_2 , R_3 , Q_4 , P_5 pontok mind egy egyenesre kerülnek. Hajtsuk végre ezeket a tükrözéseket a p , q , r egyenesek tetszőleges P^* , Q^* , R^* pontján is. A $P^*Q^*R^*$ háromszög kerületének kétszerese szétnyílik a $P^*R^*Q_1^*P_2^*R_3^*Q_4^*P_5^*$ töröttvonal hosszára. Ennek hossza nem lehet kisebb a $P^*P_5^*$ szakasz hosszánál, ez viszont egyenlő PP_5 hosszával és PQR kerületének kétszeresével.

Megjegyzés. Ábránkon a szereplő 6 kockát egy 4×3 -as alaprajzú hatszintes építménybe foglaltuk bele. Hogy a térbeli viszonyokat jobban érzékeltessük, egész közel mentünk hozzá, ezért erős perspektívus torzulások keletkeztek.

