

Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Helyezzük a háromszöget a komplex számsíkra. Kiindulási háromszögünk csúcsainak feleljenek meg az a_1 , b_1 és c_1 komplex számok. Legyen

$$\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elemi számolással adódik, hogy ha az n -edik lépés után nyert háromszög csúcsai a_n , b_n és c_n , akkor

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2} (a_n + (1 - \varepsilon)b_n + \varepsilon c_n), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2} (\varepsilon a_n + b_n + (1 - \varepsilon)c_n), \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2} ((1 - \varepsilon)a_n + \varepsilon b_n + c_n). \end{aligned}$$

Ehhez azt kell csak felhasználnunk, hogy az ε komplex számmal való szorzás $+60^\circ$ -os elforgatást eredményez (ld. pl. Reiman I.: Geometriai feladatok a komplex számsíkon. Középisk. Szakk. füzet).

Teljes indukcióval bizonyítható a következő:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left[(2^{n+1} + (-1)^n) a_1 + (2^n - (-1)^n) \frac{b_1}{\varepsilon} + (2^n - (-1)^n) c_1 \varepsilon \right] \frac{1}{3 \cdot 2^n}, \\ b_{n+1} &= \left[(2^n - (-1)^n) a_1 \varepsilon + (2^{n+1} + (-1)^n) b_1 + (2^n - (-1)^n) \frac{c_1}{\varepsilon} \right] \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^n}, \\ c_{n+1} &= \left[(2^n - (-1)^n) \frac{a_1}{\varepsilon} + (2^n - (-1)^n) b_1 \varepsilon + (2^{n+1} + (-1)^n) c_1 \right] \frac{1}{3 \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

Így ezekből azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{2}{3} a_1 + \frac{b_1}{3\varepsilon} + \frac{1}{3} c_1 \varepsilon = a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \frac{1}{3} a_1 \varepsilon + \frac{2}{3} b_1 + \frac{c_1}{3\varepsilon} = b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \frac{a_1}{3\varepsilon} + \frac{1}{3} b_1 \varepsilon + \frac{2}{3} c_1 = c. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy ez a háromszög szabályos. Ehhez elég belátni, hogy

$$(c - b)\varepsilon = a - b.$$

Behelyettesítve a fenti értékeket, beszorozva és rendezve:

$$\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon^2 - 1) a_1 + b_1 (\varepsilon^3 + 1) + c_1 (-\varepsilon + \varepsilon^2 + 1) = 2b_1 (\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)$$

egyenlőség belátása marad hátra. Ez azonban igaz, mivel

$$\varepsilon^6 - 1 = 0$$

és az

$$\varepsilon^6 - 1 = (\varepsilon^3 - 1) (\varepsilon^3 + 1) = (\varepsilon^3 - 1) (\varepsilon + 1) (\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)$$

szorzatban

$$\varepsilon^3 - 1 \neq 0, \quad \varepsilon + 1 \neq 0,$$

tehát

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0,$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\varepsilon^3 + 1 = 0.$$

Állításunkat ezzel beláttuk.

Összefoglalva eredményünket: az $A_n B_n C_n$ háromszögek egy szabályos háromszöghöz konvergálnak.

Wolfgang Moldenhauer (Rostock) megoldása