

Ha valamely c értékre teljesül, hogy az $\left(n\sqrt{2} - \frac{c}{n}, n\sqrt{2} + \frac{c}{n}\right)$ intervallum semmilyen természetes n -re nem tartalmaz egész számot, akkor n értékét 2-nek választva $2\sqrt{2} - \frac{c}{2} \leq 2\sqrt{2} < 3$ miatt $2\sqrt{2} + \frac{c}{2} \leq 3$ kell hogy teljesüljön. Ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha $c \leq 6 - 4\sqrt{2}$. Ez azt jelenti, hogy c maximum $6 - 4\sqrt{2}$ lehet. Megmutatjuk, hogy ez jó is: az $I = \left(n\sqrt{2} - \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}, n\sqrt{2} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}\right)$ intervallum semmilyen természetes n -re nem tartalmaz egész számot.

Ennek bizonyítása érdekében hasonlóan járhatunk el, mint az 1971. feladatban. Tegyük fel, hogy az I intervallum tartalmaz egész számot, jelöljük ezt A -val. Ekkor, mivel $n\sqrt{2} - \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n} (n \geq 1)$ pozitív, az

$$\left(\left(n\sqrt{2} - \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}\right)^2, \quad \left(n\sqrt{2} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}\right)^2\right)$$

intervallum tartalmazni fogja az A^2 természetes számot. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left(n\sqrt{2} - \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}\right)^2 > 2n^2 - 1$$

minden természetes n -re és

$$\left(n\sqrt{2} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{n}\right)^2 \leq 2n^2 + 1 \quad n \geq 2 \text{ egészre.}$$

Ebből következik, hogy $n \geq 2$ esetén A^2 a $(2n^2 - 1, 2n^2 + 1)$ intervallumba esik, azaz $A^2 = 2n^2$. Ekkor azonban $\sqrt{2}$ racionális szám lenne, $n \geq 2$ esetében tehát ellentmondásra jutottunk:

$$n = 1 \text{ esetén} \quad 1 < \sqrt{2} - (6 - 4\sqrt{2}) < \sqrt{2} + (6 - 4\sqrt{2}) < 2$$

egyenlőtlenségsorozatból közvetlenül adódik az állítás.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)