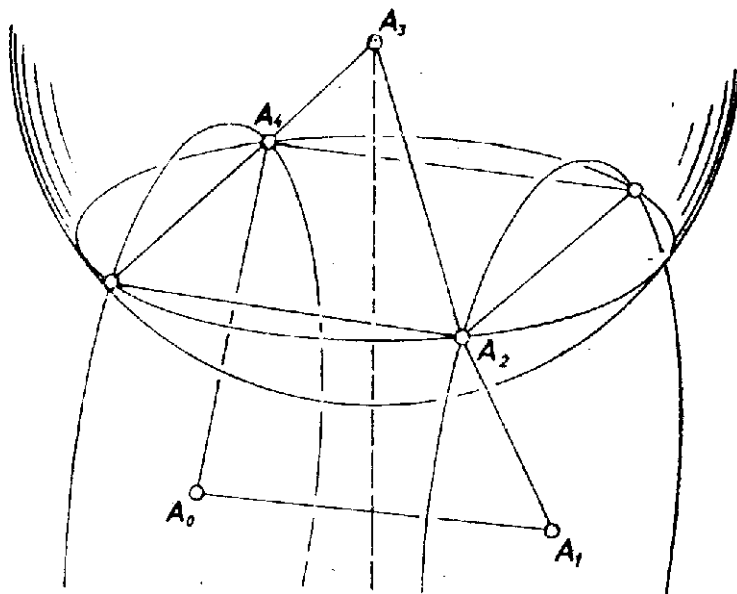


Jelöljük a keresett sokszög csúcsait  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ -gyel, és legyen  $A_n = A_0, A_{n+1} = A_1$ . A mondott feltételek ekvivalensek azzal, hogy

$$(1) \quad A_i A_{i+1} = 1, \quad A_i A_{i+2} = \sqrt{2}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ha  $n \leq 3$ , (1) ellentmondásokat tartalmaz, így csak  $n \geq 4$  jöhet szóba. Ha  $n = 4$ , a négyzet megfelel. Megmutatjuk, hogy  $n = 5$  mellett (1) nem megoldható. Ha ugyanis megoldható volna, az  $A_0 A_1 A_3$  háromszögben  $A_0 A_1 = 1, A_1 A_3 = A_0 A_3 = \sqrt{2}$  volna,  $A_2, A_4$  pedig egyrészt az  $A_0 A_1$  szakasz síkjára merőleges,  $A_1$ , illetve  $A_0$  körüli egységsugarú  $k_2, k_4$  körön volna, másrészt e pontok az  $A_3$  körüli egységsugarú gömbön is rajta volnának.



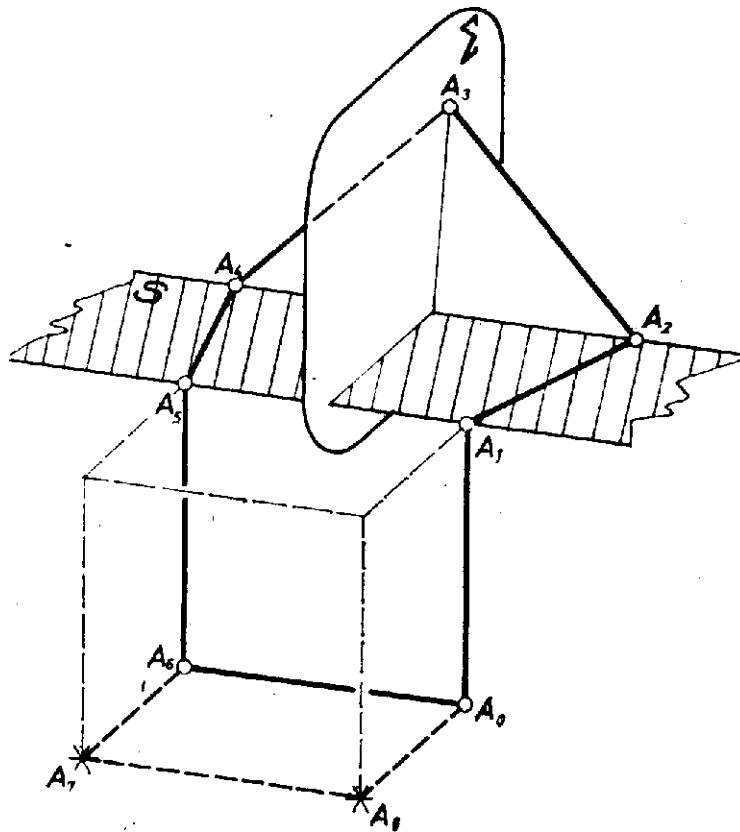
1. ábra

A gömb és  $k_2, k_4$  metszéspontjai egy téglalapot határoznak meg, amelynek  $A_0 A_1$ -gyel párhuzamos oldala egységnyi, tehát nem játszhatja az  $A_2 A_4$  szakasz szerepét, és mint az némi számolással látható, átlója sem  $\sqrt{2}$  hosszú, tehát az sem lehet  $A_2 A_4$ .

Ha  $n = 6$ , a keresett pontrendszer lehet például egy kocka két szomszédos lapjának hat csúcsa. Ha  $n = 7$ , a konstrukció a következő: induljunk ki az  $A_1 A_2 A_4 A_5$  négyszögből, ebben válasszuk  $A_2 A_4$ -t  $A_1 A_5$ -tel párhuzamosnak,  $A_1 A_5$  hosszát egységnyinek, és természetesen legyen

$$A_1 A_2 = 1, \quad A_2 A_4 = \sqrt{2}, \quad A_4 A_5 = 1.$$

Jelöljük az  $A_1 A_2 A_4 A_5$  trapéz síkját  $S$ -sel, az  $S$ -re merőleges, a trapéz szimmetriatengelyén átmenő síkot  $\Sigma$ -val.



2. ábra

Mivel  $A_4A_5$  nem merőleges  $\Sigma$ -ra, az  $A_5$ -ön átmenő,  $A_4A_5$ -re merőleges, és az ugyancsak  $A_5$ -ön átmenő  $\Sigma$ -val párhuzamos síkok metszik egymást. Metszésvonalukra mérjük fel az  $A_5A_6 = 1$  szakaszt, mivel  $A_1A_5 \perp \Sigma$ , az  $A_1A_5A_6$  háromszög egy négyzet fele, legyen  $A_0$  a négyzet hiányzó csúcsa. A hiányzó  $A_3$  pontot az  $A_2A_3 = 1$ ,  $A_1A_3 = \sqrt{2}$  feltételek  $\Sigma$ -ban már lényegében meghatározzák. Ha itt az  $A_0A_1A_5A_6$  négyzetre egy kockát illesztünk, annak  $A_0A_6$ -hoz csatlakozó lapján megkerülhetjük az  $A_0A_6$  szakaszt, tehát az oldalak száma 2-vel könnyen növelhető. Hasonlóan lépkedve tovább tetszőleges páratlan  $n$ -re megoldást kapunk, a párosokat pedig a már tárgyalt  $n = 6$  esetből állíthatjuk elő.

Térben tehát az  $n \leq 3$ ,  $n = 5$  esetek kivételével minden  $n$ -hez található a kívánt tulajdonságú  $n$ -szög.

*Megjegyzés.* Síkban is vizsgálható a kérdés, és belátható, hogy csak 4-gyel osztható  $n$ -ek jöhetnek szóba, és ezek mindegyike realizálható is, kivéve az  $n = 8$  esetet, ebben csak akkor kapunk megoldást, ha megengedjük, hogy például  $A_0$  és  $A_4$  azonos legyen.