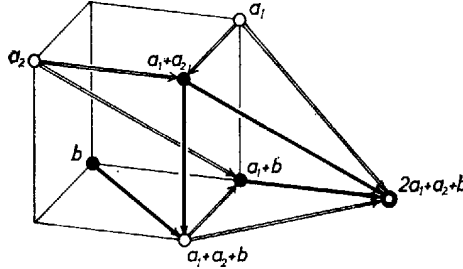


Legyen N tetszőleges szám, amely mellett a kívánt osztályozás elvégezhető, és jelöljük a kapott osztályokat A -val, B -vel. Legyen a_1, a_2 az A két különböző eleme, és b a B tetszőleges eleme, amelyre

$$(1) \quad b \neq a_1 + a_2, \quad b \neq a_2 - a_1$$

teljesül. Ha a $b_1 = a_1 + a_2$ számot még osztályoztuk, az csak B -hez tartozhat, hiszen két különböző A -beli szám összege. Ha az $a_3 = b_1 + b = a_1 + a_2 + b$ számot még osztályoztuk, az csak A -hoz tartozhat, hiszen két különböző B -beli összege. Ekkor a $b_2 = a_1 + b$ szám nem tartozhat A -hoz, különben az A -beli a_3 két különböző A -beli szám összege volna. Ezek szerint a $c = a_1 + a_3 = b_1 + b_2 = 2a_1 + a_2 + b$ számot már semmi esetre sem osztályozhatjuk, hiszen ez két különböző A -beli számnak is és két különböző B -beli számnak is az összege.



Ezzel beláttuk, hogy

$$(2) \quad N < 2a_1 + a_2 + b,$$

hiszen különben az a_2, a_3, b_1, b_2, c számok mindegyikét osztályoznunk kellene, és mint megmutattuk, ez lehetetlen.

Ha az $\{n, n+1, \dots, N\}$ számok valamely kívánt tulajdonságú osztályozásánál az $n, n+1, n+2$ számok nem kerülnek ugyanabba az osztályba, válasszuk A -nak azt az osztályt, amelyikbe közülük kettő került, a_1 -nek ezek közül a kisebbiket, a_2 -nek a másikat, és b legyen a harmadik. Ha $n > 1$, ezekre teljesül (1), emiatt ilyen osztályozás csak akkor lehetséges, ha N -re teljesül a (2)-nek megfelelő

$$(3) \quad N < 2a_1 + a_2 + b \leq n + 2(n+1) + (n+2) = 4n + 4$$

egyenlőtlenség. Ha $n = 1$, és $b = 1$, akkor (2) szerint $N < 8$; ha $b = 2$, akkor az $a_1 = 3, a_2 = 1$ választással kapjuk (2)-ből, hogy $N < 9$; ha pedig $b = 3$, akkor 1, 2 A -beli, és két újabb esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a 4 A -hoz tartozik-e vagy B -hez. Ha $4 \in A$, akkor $5 \in B, 6 \in B, 7 \in B, 8 \in A$ és a 9 már nem osztályozható. Ha $4 \in B$, akkor $7 \in A, 6 \in B, 5 \in B$, és már a 8 sem osztályozható. Tehát $n = 1$ mellett (3) helyett csak a kevesebbet mondó

$$(3^*) \quad N \leq 4n + 4$$

állítható.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor az $n, n+1, n+2$ számok ugyanabba az osztályba kerülnek. Válasszuk ebben az esetben az n -t tartalmazó osztályt A -nak. Mivel $n \in A, n+1 \in A$, a $2n+1$ szám csak B -beli lehet, így alkalmazhatjuk (2)-t az $a_1 = n, a_2 = n+2, n = 2n+1$ helyettesítéssel:

$$(4) \quad N < 2n + (n+2) + 2n+1 = 5n + 3.$$

Ha $n = 1$, akkor (4) szigorúbb (3*)-nál, tehát a legnagyobb N -et a már vizsgált

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, \quad B = \{3, 5, 6, 7\}$$

osztályozás biztosítja. Ha $n > 1$, akkor (3) szigorúbb (4)-nél, tehát N legnagyobb szóba jöhető értéke

$$(5) \quad N_{\max} = 5n + 2.$$

Ez el is érhető, ha B -nek a

$$B = \{2n+1, 2n+2, \dots, 4n+2\}$$

halmazt választjuk, A -nak pedig ennek komplementerét:

$$A = \{n, n+1, \dots, 2n, 4n+3, 4n+4, \dots, 5n+2\}.$$

Kaptuk tehát, hogy N legnagyobb értékét (5) adja meg, kivéve az $n = 1$ esetet, amikor $N_{\max} = 8$.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az, hogy a kívánt osztályozás nem végezhető el tetszőlegesen nagy N -re, már abból látszik, hogy ha $a_1, a_2 \in A, b \in B$, akkor $a_1 + b \in B$. Ha ugyanis most b mellé veszünk fel egy $b_1 \in B$ elemet, azt is beláthatjuk, hogy $a_1 + b \in A$, szóval a baj ott kezdődik, hogy nem lehet eldönteni, hogy egy A -beli és egy B -beli elem összege hova tartozzon.